

تخمین دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن توده سنگی با استفاده از مفهوم شار تکانه موج

محمدنوید مقیم*

استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، پست الکترونیکی: moghim@cc.iut.ac.ir

تاریخ پذیرش: ۹۴/۵/۲۶

* نویسنده مسؤل

تاریخ دریافت: ۹۳/۱۱/۲۰

© نشریه علمی - پژوهشی اقیانوس شناسی ۱۳۹۴، تمامی حقوق این اثر متعلق به نشریه اقیانوس شناسی است.

چکیده

بررسی فشار وارد بر سازه موج شکن های توده سنگی با توجه به تأثیر آن در طراحی این نوع سازه ها و همچنین اثر آن بر پایداری هیدرولیکی لایه آرمور، واکنش های هیدرولیکی و تغییرات تراز سطح آب داخل سازه اهمیت پیدا می کند. از طرف دیگر با توجه به پیچیدگی جریان برخوردی به محیط متخلخل توده سنگی لایه آرمور در اثر شکست موج، محاسبه فشار وارد بر قطعات سنگی به لحاظ تحلیلی غیرممکن می شود. در مقاله حاضر از یک مفهوم فیزیکی مناسب یعنی شار تکانه موج برخوردی به سازه با انتگرال گیری شار در عمق جریان پای سازه موج شکن استفاده شد. و چگونگی تأثیر آن بر دامنه تغییرات فشار مرجع ایجاد شده روی بدنه موج شکن توده سنگی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده حاکی از قابلیت مناسب مفهوم فیزیکی شار تکانه موج در تخمین دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن توده سنگی برای امواج منظم و نامنظم بوده، به طوری که برای امواج منظم نتایج حاصل از تئوری موج خطی و موج فوری و برای امواج نامنظم نتایج حاصل از تئوری موج فوری مناسب تر از سایر تئوری های موج شد. نتایج نشان دادند که ترم مربوط به فشار دینامیکی سهم بزرگی از مشارکت را در میزان حداکثر شار تکانه موج بی بعد شده دارا است.

کلمات کلیدی: موج شکن توده سنگی، فشار، شار تکانه موج، امواج منظم و نامنظم.

۱. مقدمه

حمله موج برخوردی و ایجاد منطقه امن در پشت این سازه، از اهمیت ویژه ای در مهندسی سواحل و بنادر برخوردار هستند.

زمانی که پاسخ سازه موج شکن توده سنگی در برابر برخورد موج مورد مطالعه قرار می گیرد، دانستن فشار آب ایجاد شده در سازه در اثر برخورد موج به دلیل تأثیرگذاری آن بر بسیاری از پارامترهای واکنشی سازه متخلخل از جمله بالاروی موج، سرریزی موج، انعکاس موج، انتقال موج از درون سازه، فشار آب منفذی داخل سازه و همچنین پایداری هیدرولیکی و ژئوتکنیکی

نواحی ساحلی هر کشور در زمره منابع ارزشمند ملی به شمار می آید. مجاورت با آب های آزاد نه تنها امتیاز بی نظیر حمل و نقل های آسان و ارزان را در اختیار قرار می دهد، بلکه مجموعه ای از استعدادهای متنوع برای فعالیت های اقتصادی، فرهنگی و حتی نظامی را عرضه می کند. موج شکن های توده سنگی از جمله سازه های نفوذپذیر ساحلی بوده که به دلیل حفاظت سواحل در برابر

سازه، اهمیت پیدا می‌کند (مقیم و همکاران، ۱۳۸۹). از طرف دیگر ایجاد تغییرات فشار آب منفذی در داخل سازه در اثر برخورد موج به سازه منجر به تغییر فشار مؤثر گردیده به طوری- که اگر در اثر این تغییرات، فشار مؤثر به حدی کاهش یابد که گسیختگی ژئوتکنیکی به وجود آید، پایداری سازه موج‌شکن به خطر خواهد افتاد.

خرابی اخیر تعدادی از موج‌شکن‌ها در طول طوفان مانند موج‌شکن Sines در کشور پرتغال، موج‌شکن Bilbao در کشور اسپانیا، موج‌شکن Tripoli در کشور لیبی، موج‌شکن Diablo Canyon در کشور آمریکا و غیره نشان می‌دهند که روابط موجود برای طراحی سازه موج‌شکن کفایت نکرده و نیاز به مطالعه بیشتری دارند (Vanneste and Troch, 2010).

De Groot و همکاران (۱۹۹۴) اهمیت بررسی فشار آب بر سازه در طراحی موج‌شکن به‌ویژه در تحلیل پایداری شیب سازه در قسمت پایینی (نزدیک کف) لایه فیلتر و همچنین اثر فشار بر پایداری هیدرولیکی لایه آرمور، بالاروی موج، سرریزی موج، عبور موج و بالا آمدن تراز سطح آب داخل سازه را مورد بررسی قرار دادند.

دامنه نوسانات فشار داخل سازه نفوذپذیر تحت اثر موج از رابطه ۱ محاسبه گردید (Biesel, 1950):

$$P(x) = P_0 e^{-\delta \frac{2\pi}{L'} x} \quad \text{رابطه ۱}$$

در این رابطه x فاصله افقی نسبت به مبدا در محل مرز بین لایه فیلتر و هسته در هر تراز، P_0 مقدار دامنه تغییرات فشار مرجع در موقعیت $\alpha = 0$ $P(x)$ دامنه تغییرات ارتفاع فشار منفذی (دو برابر دامنه نوسان فشار) در محل α δ ضریب استهلاک، L' طول موج داخل هسته سازه برابر $L' = L/\sqrt{D}$ ، L طول موج برخوردی و D ضریبی برای به حساب آوردن طول نشت آب در اثر انحراف مسیر جریان توسط دانه‌های سنگی است (شکل ۱).

در این رابطه، n تخلخل لایه مغزه، b عرض لایه مغزه در عمق مشخص و T_p حداکثر پریود موج و L_p طول موج محاسبه شده بر اساس حداکثر پریود موج هستند. در این رابطه مقدار a_δ بر اساس نتایج آزمایشگاهی و مقادیر اندازه‌گیری شده در طبیعت (موج‌شکن Zeebrugge) برابر ۰/۵ به دست آمده است. واضح است که برای به دست آوردن توزیع فشار منفذی داخل سازه نیاز به دانستن مقدار فشار مرجع یعنی فشار آب وارد بر سازه در اثر برخورد موج است که در تحقیقات پیشین به آن پرداخته نشده است.

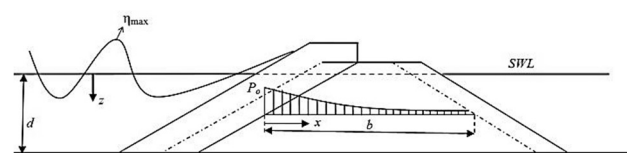
با توجه به تأثیر فشار وارد بر سازه در طراحی موج‌شکن توده سنگی و همچنین اثر آن بر پایداری هیدرولیکی لایه آرمور، بالاروی موج، سرریزی موج، عبور موج و بالا آمدن تراز سطح آب داخل سازه، اهمیت بررسی فشار وارد بر سازه موج‌شکن توده سنگی واضح است. از طرف دیگر با توجه به پیچیدگی جریان برخوردی به محیط متخلخل سنگی لایه آرمور در اثر شکست موج، محاسبه فشار وارد بر قطعات سنگی به لحاظ تحلیلی غیر ممکن است. بدین منظور در این مطالعه با استفاده از یک روش تحلیلی - تجربی، به کارگیری یک مفهوم فیزیکی مناسب یعنی استفاده از مفهوم شار تکانه موج برخوردی به صورت انتگرال‌گیری شار در عمق جریان پای سازه موج‌شکن و چگونگی تأثیر آن بر دامنه تغییرات فشار مرجع ایجاد شده روی بدنه موج‌شکن توده سنگی مورد نظر است.

شکل ۱: شکل شماتیک از مدل موج‌شکن و موج برخوردی به آن (Vanneste and Troch, 2010)

طبق این رابطه، مقدار دامنه نوسانات فشار داخل سازه نفوذپذیر با افزایش فاصله از محل اندازه‌گیری فشار مرجع در

شکل ۱: شکل شماتیک از مدل موج‌شکن و موج برخوردی به آن (Vanneste and Troch, 2010)

طبق این رابطه، مقدار دامنه نوسانات فشار داخل سازه نفوذپذیر با افزایش فاصله از محل اندازه‌گیری فشار مرجع در



شکل ۱: شکل شماتیک از مدل موج‌شکن و موج برخوردی به آن (Vanneste and Troch, 2010)

طبق این رابطه، مقدار دامنه نوسانات فشار داخل سازه نفوذپذیر با افزایش فاصله از محل اندازه‌گیری فشار مرجع در

۲. شار تکانه موج

این محققین با استفاده از تئوری موج خطی، فشار و سرعت افقی را در رابطه ۴ جایگزین نموده و انتگرال فوق را با استفاده از مفهوم سینماتیک موج مرتبه اول تا بالای تراز سطح ایستابی حل کردند. با استفاده از تئوری موج خطی، رابطه فوق به صورت رابطه ۵ به دست آمد:

$$S_{xx} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) \quad \text{رابطه ۵}$$

L طول موج، d عمق آب از کف دریا تا سطح ایستابی، $\eta(x)$ تراز سطح دریا نسبت به تراز سطح ایستابی، z راستای عمودی که جهت مثبت آن به سمت بالا و مبدا آن در سطح تراز ایستابی بوده، x راستای افقی که جهت مثبت آن در جهت انتشار امواج است، g شتاب گرانشی، a دامنه موج و k عدد موج ($k = \frac{2\pi}{L}$) است. قابل ذکر است که واحد S_{xx} نیرو بر واحد طول موج است. تغییر زیادی در مقدار شار تکانه موج انتگرال‌گیری شده در طول یک موج برای مقادیر مثبت بزرگ یعنی در تاج موج و همچنین مقادیر منفی بزرگ یعنی در حوض موج وجود دارد. از این رو به جای پذیرش یک مقدار متوسط (یعنی S_{xx}) که در مقایسه با محدوده تغییرات ذکر شده کوچک است، منطقی به نظر می‌رسد که برای بررسی فرایندهای ساحلی مانند اثر نیروی موج بر سازه، از مقدار حداکثر شار تکانه موج انتگرال‌گیری شده در عمق که در یک طول موج اتفاق می‌افتد استفاده شود. این مفهوم با در نظر گرفتن حداکثر مقدار رابطه ۶ در یک طول موج به دست می‌آید:

$$M_f(x, t) = \int_{-d}^{\eta(x)} (p_d + \rho u^2) dz \quad \text{رابطه ۶}$$

حداکثر مقدار رابطه ۶ در موقعیت تاج موج اتفاق می‌افتد (یعنی $\eta(x) = a$). قابل توجه اینکه برای یک دیوار عمود و با سطح نفوذناپذیر که موج برخوردی به آن کاملاً منعکس می‌شود، مؤلفه سرعت افقی ذرات (u) در محل دیوار برابر صفر بوده و لذا در این رابطه فقط انتگرال فشار دینامیکی در عمق آب محاسبه می‌شود. بدین طریق می‌توان نیروی لحظه‌ای موج روی دیوار (به غیر از مؤلفه نیروی ناشی از فشار هیدرواستاتیکی) را به دست آورد.

در ادامه بر اساس تحقیق انجام شده توسط Hughes (2004a) به محاسبه پارامتر حداکثر شار تکانه موج با استفاده از تئوری موج خطی، تئوری موج خطی توسعه یافته و تئوری موج فوریه پرداخته خواهد شد.

در مطالعه‌ای که توسط Hughes (2004a) انجام شد، با استفاده از نگرش فیزیکی به فرایندهای ساحلی و همچنین روند طراحی سازه‌های ساحلی از پارامتر مهمی به نام شار تکانه موج استفاده نمود. این پارامتر به صورتی است که به لحاظ فیزیکی مرتبط با پدیده حاکم بوده و توانایی بیان ساده از فرایندهای فیزیکی ناشی از نیروی موج در مدل‌ها را دارا است.

تمامی تئوری‌های موج بر مبنای ساده سازی‌های صورت گرفته در معادلات پیوستگی و تکانه موج شکل گرفته‌اند. با توجه به این موضوع نیاز به یک پارامتر جانشین برای در نظرگیری نرخ تغییر تکانه موج در طراحی سازه ساحلی و همچنین بررسی فرایندهای نزدیک به ساحل احساس می‌شود. Longuet-Higgins و Stewart (۱۹۶۴) گزارش نمودند که امواج سطحی دارای تکانه بوده به طوری که به صورت موازی با جهت انتشار موج، هدایت می‌شوند. این تکانه، متناسب با مربع دامنه موج است. یک قطار موج زمانی که از یک مانع منعکس می‌شود، تکانه آن باید تغییر جهت دهد. بر اساس قانون بقای تکانه بایستی نیروی مساوی با نرخ تغییر تکانه موج به آن مانع وارد شود که این نیرو ناشی از تنش تشعشعی است. از این رو شار تکانه موج خاصیتی از امواج پیش‌رونده بوده که مرتبط با نیروی وارد بر سازه‌های ساحلی یا هر جسم جامد دیگری که در میدان موج قرار داشته باشد خواهد بود.

شار تکانه افقی لحظه‌ای (m_f) در واحد سطح عمود بر راستای حرکت تاج امواج برخوردی مطابق رابطه ۳ است.

$$m_f(x, z, t) = p_d + \rho u^2 \quad \text{رابطه ۳}$$

در این رابطه P_d فشار دینامیکی لحظه‌ای موج در یک مکان مشخص، u سرعت افقی لحظه‌ای ذرات آب در همان مکان مشخص و ρ چگالی آب است.

Longuet-Higgins و Stewart (۱۹۶۴) برای اولین بار پارامتر تنش تشعشعی را که به صورت عمود بر تاج موج برخوردی است، معرفی نمودند. در واقع این پارامتر عبارت از شار تکانه موج انتگرال‌گیری شده در عمق آب و متوسط گیری شده در یک طول موج است، که طبق رابطه ۴ بیان می‌شود.

$$S_{xx} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-d}^{\eta(x)} (p_d + \rho u^2) dz dx \quad \text{رابطه ۴}$$

۲-۱. حداکثر شار تکانه موج بر اساس تئوری موج خطی

موج) رابطه ۹ به صورت بی بعد بر اساس تئوری موج خطی بسط یافته به دست آمده است:

$$\left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{d}\right) \frac{\sinh\left[k\left(d + \frac{H}{2}\right)\right]}{kd \cosh(kd)} + \frac{1}{8} \left(\frac{H}{d}\right)^2 \times \left[\frac{\sinh\left[2k\left(d + \frac{H}{2}\right)\right] + 2k\left(d + \frac{H}{2}\right)}{\sinh 2kd} \right] \quad \text{رابطه ۹}$$

Hughes (2004a) بیان نمود همان گونه که انتظار می رود برای شرایط یکسان موج برخوردی، تخمین حداکثر شار تکانه موج انتگرال گیری شده از روش تئوری موج خطی بسط یافته، بیشتر از تخمین به دست آمده توسط تئوری موج خطی است. به طوری که این روش برای امواج بلند، بیشترین افزایش در حدود ۳۰٪ نسبت به حالت موج خطی دارد. تئوری خطی توسعه یافته تخمین بهتری از (Mf)max نسبت به تئوری موج خطی می دهد، اما هنوز عدم تقارن موج حول محور افقی که دارای تاج های نوک تیز و بلند و حوضی های پهن و کوتاه بوده و از مشخصات امواج غیر خطی است، لحاظ نشده است.

۲-۳. حداکثر شار تکانه موج بر اساس تئوری موج فوریه

با توجه به آنکه تئوری های موج خطی و موج خطی توسعه یافته، تخمین تحلیلی ساده ای از حداکثر شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق را می دهند، ولی تجربه نشان داده اگر این پارامتر در مورد مساله اندرکنش موج با سازه های ساحلی بکار گرفته شود، شار تکانه در تاج موج دارای خطا بوده و باید با یک نگاه واقع بینانه تر آن را به دست آورد. در واقع در تخمین شار تکانه موج توسط تئوری موج خطی، قسمت شار تکانه در بالای سطح ایستابی در نظر گرفته نشده و همچنین در تئوری موج خطی توسعه داده شده، آثار موج غیر سینوسی لحاظ نمی شود.

تقریب تئوری موج فوریه (Rienecker and Fenton, 1981; Sobey, 1989; Fenton, 1988) توصیف خوبی از امواج پایدار با دامنه محدود برای محدوده آب های عمیق تا محدوده کم عمق ساحلی و همچنین برای ارتفاع امواجی که تیزی آن ها به سمت مقدار حدی میل می کند ارائه می کند. تقریب تجربی ساده ای برای محاسبه پارامتر شار تکانه موج با دامنه محدود، توسط Hughes (2004a) بسط داده شد و معادله تجربی برای تخمین پارامتر شار تکانه موج برای امواج پایدار با دامنه محدود به صورت رابطه ۱۰ به دست آمد.

تقریب مرتبه اول شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق، توسط جایگذاری فشار دینامیکی و سرعت افقی ذرات در موقعیت تاج موج با استفاده از تئوری موج خطی در رابطه ۶ و انتگرال گیری از کف تا سطح آب ساکن (به دلیل آنکه در تئوری موج خطی مرتبه اول، از سینماتیک آب بالای تراز سطح ایستابی صرف نظر گردیده است)، محاسبه می شود. تقریب تئوری مرتبه اول (تئوری موج خطی) برای محاسبه حداکثر شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق به صورت رابطه ۷ ساده می شود:

$$(M_f)_{\max} = \frac{\rho g a}{k} \tanh kd + \frac{\rho a^2 g}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right] \quad \text{رابطه ۷}$$

رابطه فوق مشابه S_{xx} دارای واحد نیرو بر واحد طول تاج موج بوده که برای بی بعد سازی به صورت رابطه ۸ در می آید:

$$\left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{d}\right) \frac{\tanh kd}{kd} + \frac{1}{8} \left(\frac{H}{d}\right)^2 \times \left[1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right] \quad \text{رابطه ۸}$$

در این رابطه، ترم $\left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max}$ به عنوان حداکثر شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق بی بعد شده و H ارتفاع موج بوده و دو برابر دامنه موج a ($H = 2a$) است. در این رابطه پارامتر شار تکانه موج به صورت تابعی از ارتفاع موج نسبی $\left(\frac{H}{d}\right)$ و عمق نسبی (kd) بیان شده است.

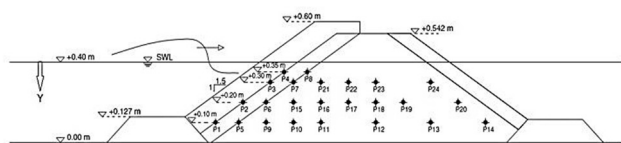
لازم به ذکر است که مقدار حداکثر شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق محاسبه شده توسط تئوری موج خطی کمتر از مقدار واقعی آن است، زیرا در این حالت شار تکانه موج در تراز بالای سطح ایستابی لحاظ نشده است (Hughes, 2004a).

۲-۲. حداکثر شار تکانه موج بر اساس تئوری موج خطی توسعه یافته

با توجه به آنکه در تئوری موج خطی، سینماتیک موج فقط تا تراز سطح ایستابی معتبر است، نیاز به تخمین دقیق تری برای محاسبه حداکثر شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق در محل تاج موج است. بدین منظور می توان از روش جدیدتری به نام تئوری موج خطی توسعه یافته استفاده نمود. در این حالت با انتگرال گیری از کرانه پایینی $z = -d$ تا کرانه بالایی $z = a$ (تاج

۳. مدل آزمایشگاهی مورد استفاده

به منظور تخمین دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج‌شکن‌های توده‌سنگی از نتایج مدل آزمایشگاهی Vanneste و Troch (۲۰۱۰) در دانشگاه خنت^۲ بلژیک استفاده شد. هندسه مدل موج‌شکن آزمایش شده و موقعیت فشارسنج‌ها در تحقیقات آن‌ها مطابق شکل ۲ است. با توجه به هدف این تحقیق، فقط از نتایج به دست آمده برای فشارسنج‌های نصب شده در لایه خارجی استفاده می‌شود. امواج تابیده به سازه موج‌شکن از نوع امواج منظم و نامنظم بوده‌اند. تراز تاج سازه به اندازه ۰/۲ متر بالای تراز سطح ایستابی (SWL) قرار داشته، به طوری که مشخصات سازه‌ای و هیدرولیکی سازه مدل شده به صورتی انتخاب شده‌اند که سازه از نوع سازه غیر سرریز شونده عمل کند. محدوده تغییرات مشخصات هیدرولیکی موج برخوردی به سازه مطابق جدول ۲ است. برای هر دو حالت موج منظم و نامنظم تعداد موج برخوردی به سازه برابر ۵۰۰ در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که در شروع آزمایش قبل از تولید موج در فلوم آزمایشگاهی، تمام فشارسنج‌ها برای فشار استاتیکی موجود در هر تراز عدد صفر را نشان می‌دهند. پس می‌توان بیان نمود که فشار نشان داده شده توسط فشارسنج‌ها در حین انجام آزمایش‌ها، فشار اضافی ایجاد شده توسط موج در سازه بوده است. در آزمایش‌های انجام شده با موج منظم، دامنه تغییرات فشار ثبت شده در هر عمق توسط ارتفاع فشار میانگین (p_0) و برای امواج نامنظم، دامنه تغییرات فشار ثبت شده در هر عمق توسط ارتفاع فشار مشخصه ($P_{0.5}$) بیان شده‌اند.



شکل ۲: شکل شماتیک از مدل موج‌شکن و فشارسنج‌های نصب شده در آن (Vanneste and Troch, 2010)

جدول ۱: محدوده تغییرات مشخصات هیدرولیکی موج برخوردی به سازه

پارامتر مورد نظر	نماد	دامنه تغییرات
ارتفاع موج منظم	H	۰/۲ تا ۰/۱ متر
پرید موج منظم	T	۱/۰۹ تا ۲/۶ ثانیه
ارتفاع موج (نامنظم)	Hs	۰/۰۶ تا ۰/۱ متر
پرید اوجی موج (نامنظم)	Tp	۱/۳ تا ۲/۶ ثانیه
عمق آب پای سازه	d	۰/۴ متر

$$\left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{max} = A_0 \left(\frac{d}{gT^2}\right)^{-A_1} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

که در این رابطه پارامترهای A_0 و A_1 به صورت رابطه ۱۱ تعریف می‌شوند:

$$A_1 = 0.1804 \left(\frac{H}{d}\right)^{-0.391} \quad A_0 = 0.6392 \left(\frac{H}{d}\right)^{2.0256} \quad \text{رابطه ۱۱}$$

Archetti و Brocchini (۲۰۰۲) ارتباط بین شار تکانه موج با بالاروی موج در ساحل را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها رابطه‌ای بین بالاروی موج و شار تکانه انتگرال‌گیری شده در عمق به صورت سری زمانی در منطقه تر و خشک ساحلی^۱ به دست آوردند. نتایج نشان دادند که حداکثر بالاروی موج روی یک شیب نفوذ ناپذیر به طور مستقیم با حداکثر شار تکانه موج انتگرال‌گیری شده در عمق متناسب است.

Hughes (2004b) داده‌های موجود بالاروی موج برای امواج منظم، امواج غیر منظم و امواج تنها را روی سطوح شیب‌دار نرم و غیرقابل نفوذ بررسی مجدد نمود و با استفاده از مفهوم فیزیکی ساده، معادله جدیدی برای محاسبه بالاروی امواج با بکارگیری پارامتر بی‌بعد شده حداکثر شار تکانه موج انتگرال‌گیری شده در عمق استخراج نمود. مبنای کار Hughes بر اساس برقراری تعادل بین حداکثر شار تکانه انتگرال‌گیری شده در عمق با وزن آب در حال بالاروی به صورت یک گوه مثلثی شکل بود.

Melby و Hughes (۲۰۰۴) معادلات تعمیم یافته جدید را برای بررسی پایداری آرمور موج‌شکن‌های توده‌سنگی سستی ارایه نمودند. این معادلات بر مبنای این فرض بود که حداکثر شار تکانه موج متناسب با حداکثر نیروهای موج وارد به واحدهای آرمور است.

Moghim و Alizadeh (۲۰۱۴) نیز با استفاده از مفهوم شار تکانه موج به بررسی پایداری موج‌شکن‌های سکویی شکل‌پذیر پرداختند و در نهایت فرمول جدیدی برای محاسبه عرض فرسایش یافته سکو تحت اثر شرایط محیطی و سازه‌ای ارایه نمودند.

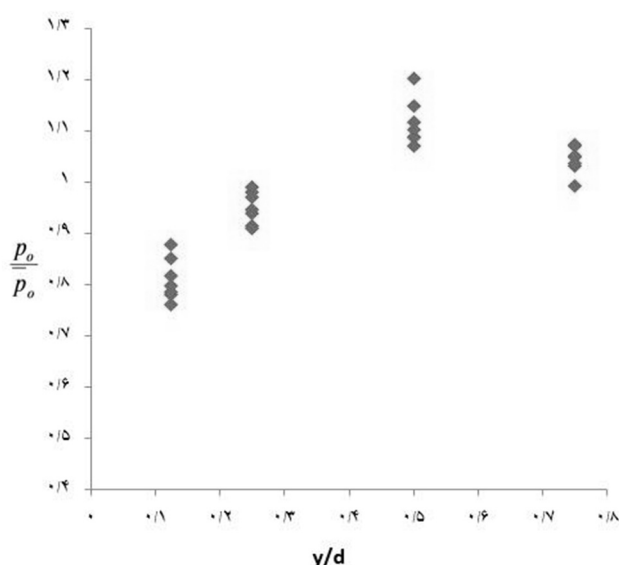
با توجه به کاربرد موفق مفهوم شار تکانه موج در تحلیل پدیده‌های مختلف اندرکنش موج با سازه، در این تحقیق به چگونگی کاربرد آن مفهوم در بررسی دامنه تغییرات فشار مرجع ایجاد شده روی بدنه موج‌شکن توده‌سنگی پرداخته می‌شود.

² Ghent university

¹ Swash zone

نسبت دامنه تغییرات فشار در هر عمق به مقدار متوسط دامنه تغییرات فشار در کل عمق $(\frac{P_o}{p_o})$ را در برابر عمق بی‌بعد شده فشار سنج نصب شده به کل عمق آب پای سازه $(\frac{y}{d})$ برای ترکیب‌های مختلف ارتفاع و پرپود موج منظم در شکل ۳ نشان داده شده است. با استفاده از روش رگرسیون چندگانه غیر خطی توسط نرم افزار آماری Systat، رابطه ۱۸ بین دامنه تغییرات فشار بی‌بعد شده و عمق بی‌بعد شده فشار سنج به‌دست آمد:

$$\frac{P_o}{p_o} = 1.186 \left(\frac{y}{d}\right)^{0.16} \quad \text{رابطه ۱۸}$$



شکل ۳: دامنه تغییرات فشار بی‌بعد شده در برابر عمق نصب شده فشار سنج برای امواج منظم

با جای‌گذاری رابطه ۱۸ در رابطه ۱۷، رابطه ۱۹ به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{P_o}{1.186 \left(\frac{y}{d}\right)^{0.16} (\rho g d)} = \alpha_a \left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max} - \frac{\alpha_a}{g d^2} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۹}$$

در واقع همان‌طور که در عبارت فوق مشاهده می‌شود رابطه ۱۹ را می‌توان با معادله یک خط، معادل قرار داد و رابطه ۲۰ را به‌دست آورد:

$$Y = \alpha_a X - \beta \quad \text{رابطه ۲۰}$$

که در آن مولفه‌ها به صورت زیر هستند:

$$\beta = \frac{\alpha_a}{g d^2} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{و} \quad X = \left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max}, \quad Y = \frac{P_o}{1.186 \left(\frac{y}{d}\right)^{0.16} (\rho g d)}$$

۴. محاسبه دامنه تغییرات فشار با استفاده از شار تکانه موج

در تحقیق حاضر به‌منظور بکارگیری مفهوم شار تکانه موج در تعیین دامنه تغییرات فشار در بدنه موج‌شکن‌های توده‌سنگی، با استفاده از انتگرال‌گیری از رابطه ۳ در عمق از کف بستر (-d) تا حداکثر تراز سطح آب در تاج موج (η_{\max}) ، مقدار حداکثر شار تکانه موج برای یک طول موج از رابطه ۱۲ به‌دست می‌آید:

$$(M_f)_{\max} = \int_{-d}^{\eta_{\max}} p_d dz + \rho \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۲}$$

با تقسیم طرفین رابطه به عمق آب پای سازه (d) رابطه ۱۳ به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{M_f}{d}\right)_{\max} = \frac{1}{d} \int_{-d}^{\eta_{\max}} p_d dz + \frac{\rho}{d} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۳}$$

با توجه به آنکه ترم اول سمت راست رابطه ۱۳، حداکثر متوسط فشار دینامیکی در عمق آب پای سازه در لحظه برخورد تاج موج به سازه $(\bar{p}_d = \frac{1}{d} \int_{-d}^{\eta_{\max}} p_d dz)$ است، رابطه فوق را می‌توان طبق رابطه ۱۴ به‌دست آورد:

$$\left(\frac{M_f}{d}\right)_{\max} = \bar{p}_d + \frac{\rho}{d} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۴}$$

با بی‌بعدسازی رابطه فوق، می‌توان رابطه ۱۵ را نتیجه گرفت:

$$\left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max} = \frac{\bar{p}_d}{\rho g d} + \frac{1}{g d^2} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۵}$$

جهت به‌دست آوردن مقدار متوسط دامنه تغییرات فشار در عمق آب پای سازه (\bar{P}_o) ، می‌توان حداکثر متوسط فشار دینامیکی در عمق آب در لحظه برخورد تاج موج به سازه را در ضریبی به‌نام ضریب دامنه (α_a) ضرب نمود $(\bar{P}_o = \alpha_a \cdot \bar{p}_d)$. بدین منظور طرفین رابطه فوق در ضریب α_a ضرب شده و به صورت روابط ۱۶ و ۱۷ به‌دست می‌آید:

$$\alpha_a \left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max} = \frac{\alpha_a \bar{p}_d}{\rho g d} + \frac{\alpha_a}{g d^2} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۶}$$

$$\frac{\bar{P}_o}{\rho g d} = \alpha_a \left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{\max} - \frac{\alpha_a}{g d^2} \int_{-d}^{\eta_{\max}} u^2 dz \quad \text{رابطه ۱۷}$$

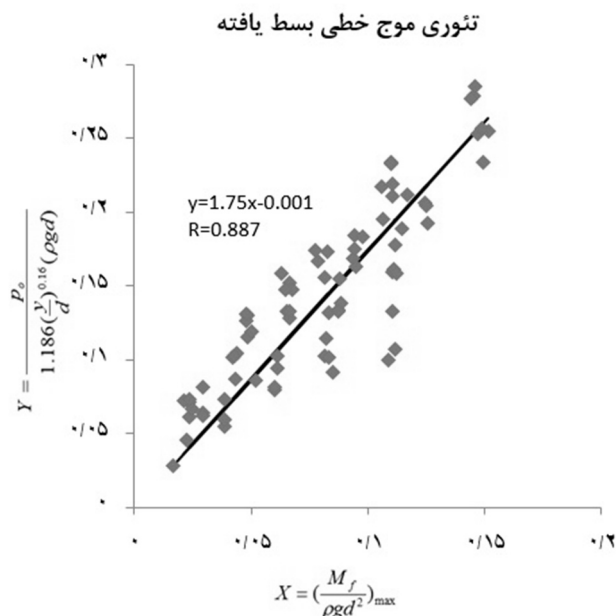
میانگین مربعات نرمالایز شده^۱ ($NRMSE$) و میزان درصد خطای نسبی (E) استفاده می‌شود. مقادیر شاخص‌های ارزیابی برای نتایج حاصل شده از رابطه ۲۰ با استفاده از مقادیر شیب و عرض از مبدا خط به دست آمده از تئوری‌های مختلف (جدول ۲) نسبت به نتایج آزمایشگاهی استخراج شدند. روابط مربوط به هر یک از شاخص‌های ارزیابی به صورت زیر تعریف می‌شوند. قابل ذکر است که هر چه پارامتر ارزیابی ضریب همبستگی (R) به عدد یک نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده پراکندگی کمتر بین نتایج است.

$$R = \frac{N \sum AB - (\sum A)(\sum B)}{\sqrt{[N \sum A^2 - (\sum A)^2][N \sum B^2 - (\sum B)^2]}} \quad \text{رابطه ۲۱}$$

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum (B - A)^2}{\sum (B - \bar{B})^2}} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

$$E = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{B - A}{B} \right| \quad \text{رابطه ۲۳}$$

در این روابط A : مقدار محاسبه شده، B : مقدار آزمایشگاهی، \bar{B} : مقدار متوسط داده‌های آزمایشگاهی و N : تعداد کل آزمایش‌ها (تعداد داده‌ها) هستند.

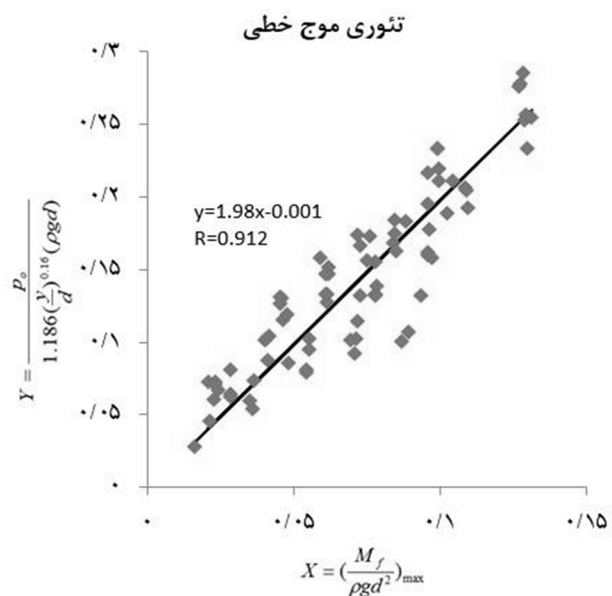


شکل ۵: مقادیر آزمایشگاهی موجود برای پارامتر Y برحسب متغیر X استفاده از تئوری موج خطی بسط یافته برای امواج منظم

لازم به ذکر است مقدار پارامتر بی‌بعد X توسط سه تئوری مختلف موج شامل تئوری موج خطی، تئوری موج خطی بسط یافته و تئوری موج فوریه که روش محاسبه آن‌ها قبلاً بدان پرداخته شد محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدا خط مذکور با استفاده از تئوری‌های مختلف موج، مقادیر آزمایشگاهی موجود برای پارامتر Y برحسب متغیر X برای امواج منظم رسم شده و بهترین خط به داده‌ها برازش داده می‌شود (شکل‌های ۴، ۵ و ۶). مقادیر شیب (α_a) و عرض از مبدا خط برازش داده شده (β) برای تئوری‌های مختلف موج مطابق جدول ۲ محاسبه گردید.

جدول ۲: مقادیر شیب و عرض از مبدا خط رسم شده با استفاده از تئوری‌های مختلف موج

پارامترها	تئوری موج خطی بسط یافته	تئوری موج فوریه
α_a	۱/۹۸	۱/۵۸
β	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۸



شکل ۴: مقادیر آزمایشگاهی موجود برای پارامتر Y برحسب متغیر X استفاده از تئوری موج خطی برای امواج منظم

مقایسه نتایج به دست آمده از هر سه تئوری موج برای امواج منظم به صورت کیفی از شکل‌های ۴، ۵ و ۶ قابل مشاهده هستند. نتایج به دست آمده در زمینه تخمین دامنه تغییرات فشار روی بدنه موج‌شکن با استفاده از تئوری‌های مختلف امواج جهت محاسبه حداکثر شار تکانه موج نیز مورد ارزیابی کمی قرار خواهند گرفت و در نهایت تئوری موج مناسب انتخاب خواهد شد. بدین منظور از تعدادی شاخص‌های ارزیابی از جمله ضریب همبستگی (R)، جذر

¹ Normalized root mean square error

موج بی بعد شده مربوط به ترم مربوط به فشار یعنی $\frac{\bar{P}_d}{\rho g d}$ بوده است. این نکته کاملاً منطقی به نظر می رسد، زیرا اگر سازه قرار گرفته جلوی موج به صورت کاملاً نفوذناپذیر و عمود بود، مؤلفه افقی سرعت برابر صفر شده ($u=0$) و سهم مشارکت ترم

$$\frac{1}{gd^2} \int_{-d}^{z_{\max}} u^2 dz$$

در مقدار حداکثر شار تکانه موج مربوطه به صفر می رسد. Hughes (2004a) بر اساس روابط تحلیلی و با استفاده از تئوری موج خطی، درصد مشارکت ترم مربوط به سرعت افقی ذره (ρu^2) نسبت به کل شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق (رابطه ۶) را برای موج منظم مورد بررسی قرار داد و بیان نمود که سهم نسبی ترم سرعت نسبت به کل شار تکانه موج انتگرال گیری شده در عمق از حدود ۵٪ برای امواج با پریود بلند و دامنه کوتاه تا حدود ۳۰٪ برای امواج با تیزی محدود شده توسط شکست موج، متغیر است که این موضوع با نتایج حاصله در این تحقیق مطابقت دارد.

جدول ۳: مقادیر شاخص های ارزیابی بر اساس تئوری های مختلف موج برای موج منظم

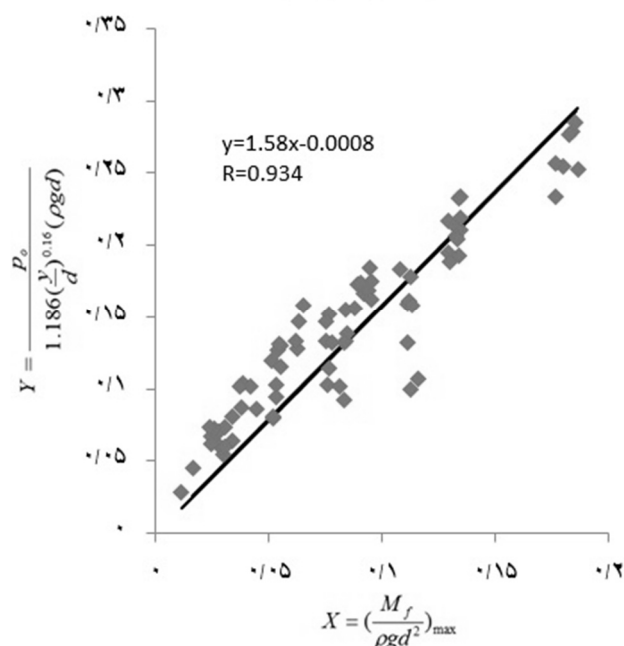
شاخص ارزیابی	تئوری موج خطی	تئوری موج خطی بسط یافته	تئوری موج فوریه
R %	۹۱/۲	۸۸/۷	۹۳/۴
E %	۱۷/۷۶	۲۰/۵۵	۲۰/۰۰
NRMSE	۰/۴۲	۰/۴۹	۰/۴۶

با توجه به برتری تئوری موج خطی در محاسبه شار تکانه موج جهت برآورد مقدار دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن های توده سنگی در حالت موج منظم، با بکارگیری مقادیر شیب (α_a) و عرض از مبدا خط برازش داده شده (β) در رابطه ۲۰ مطابق جدول ۲ برای حالت تئوری موج خطی، رابطه ۲۴ به دست می آید:

$$\frac{P_o}{\rho g d} = 1.186 \left(\frac{Y}{d} \right)^{0.16} \left[1.98 \left(\frac{M_f}{\rho g d^2} \right)_{\max} - 0.001 \right] \quad \text{رابطه ۲۴}$$

مقادیر محاسبه شده دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن توسط فرمول تحقیق حاضر در برابر نتایج آزمایشگاهی برای داده های مربوط به امواج منظم در شکل ۷ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود فرمول ۲۴ و در نتیجه کاربرد مفهوم شار تکانه موج برای بررسی دامنه تغییرات فشار ایجاد شده در موج شکن توده سنگی دارای عملکرد مناسبی است.

تئوری موج فوریه



شکل ۶: مقادیر آزمایشگاهی موجود برای پارامتر Y برحسب متغیر X با استفاده از تئوری موج فوریه برای امواج منظم

جدول ۳ مقادیر شاخص های ارزیابی برای نتایج به دست آمده با استفاده از تئوری های مختلف امواج را نشان می دهد. همان طور که در این جدول مشاهده می شود برای موج منظم، شاخص های ارزیابی از نتایج به دست آمده توسط تئوری موج خطی و تئوری موج فوریه مناسب تر از تئوری موج خطی بسط یافته است. به طوری که برای تئوری موج خطی مقدار ضریب همبستگی برابر ۹۱/۲٪ و مقدار درصد خطای نسبی (E) و جذر میانگین مربعات نرمالایز شده ($NRMSE$) به ترتیب برابر ۱۷/۷۶٪ و ۰/۴۲ به دست آمدند. در ادامه از نتایج مربوط به تئوری موج خطی برای امواج منظم استفاده شد. دلیل قابل قبول بودن تئوری موج خطی در این مورد شاید مربوط به قرارگیری محدوده تغییرات نسبت d/L از حدود ۰/۰۸ تا ۰/۲۳ یعنی شرایط آب متوسط است. همان طور که در شکل ۴ مشاهده می شود مقدار شیب و عرض از مبدا خط برابر ۱/۹۸ و ۰/۰۰۱- به دست آمده است.

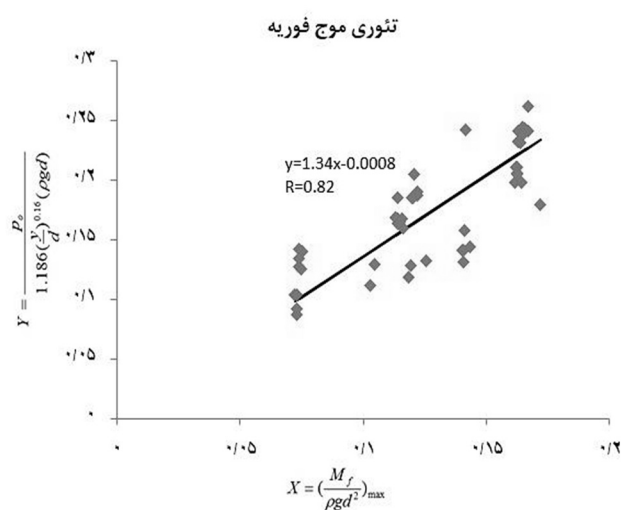
با توجه به مباحث فوق و نتایج به دست آمده می توان بیان نمود که ترم مربوط به مشارکت سرعت افقی ذره (u) در محاسبه مقدار حداکثر شار تکانه موج بی بعد شده در کل عمق آب پای سازه یعنی ترم $\frac{1}{gd^2} \int_{-d}^{z_{\max}} u^2 dz$ بر اساس نتایج آزمایشگاهی حداکثر ۳/۱٪ مقدار حداکثر شار تکانه موج بوده و این در حالی است که سهم بزرگی از مشارکت در مقدار حداکثر شار تکانه

مقادیر آزمایشگاهی موجود برای پارامتر Y برحسب متغیر X با استفاده از رابطه ۲۰ در تئوری موج فوریه برای امواج نامنظم در شکل ۸ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود مقدار شیب و عرض از مبدا خط برابر $۱/۳۴$ و $-۰/۰۰۰۸$ به‌دست آمده است. در این حالت می‌توان بیان نمود که ترم مربوط به مشارکت سرعت افقی ذره (u) در مقدار حداکثر شار تکانه موج بی‌بعد شده در کل عمق آب پای سازه یعنی ترم حداکثر شار $\frac{1}{gd^2} \int_{-d}^{u_{max}} u^2 dz$ بر اساس نتایج آزمایشگاهی حداکثر $۰/۸۳\%$ مقدار مشارکت در مقدار حداکثر شار تکانه موج بی‌بعد شده مربوط به ترم مربوط به فشار یعنی $\frac{P_d}{\rho g d}$ بوده و بنابراین می‌توان از سهم مشارکت ترم سرعت افقی در برابر ترم مربوط به فشار صرف‌نظر نمود و رابطه ۲۵ را برای محاسبه مقدار دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج‌شکن‌های توده سنگی بر اساس مفهوم شار تکانه موج با استفاده از تئوری موج فوریه برای امواج نامنظم به-کار برد:

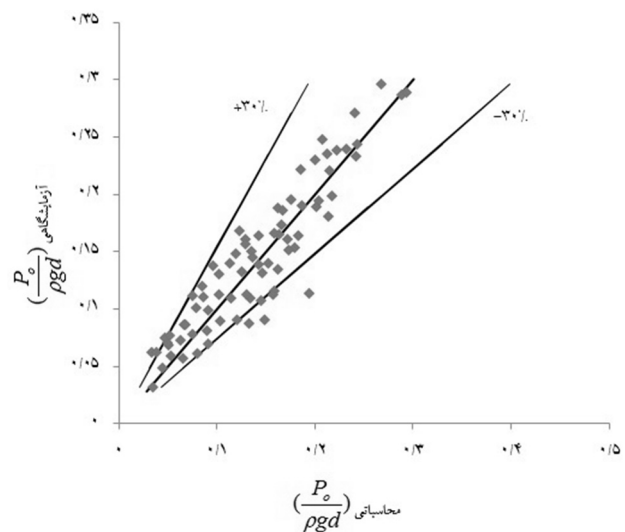
$$\frac{P_o}{\rho g d} = 1.59 \left(\frac{y}{d}\right)^{0.16} \left(\frac{M_f}{\rho g d^2}\right)_{max} \quad \text{رابطه ۲۵}$$

جدول ۴: مقادیر شاخص‌های ارزیابی بر اساس تئوری‌های مختلف موج برای موج نامنظم

شاخص ارزیابی	تئوری موج خطی	تئوری موج خطی بسط یافته	تئوری موج فوریه
R %	۷۶/۹	۶۸/۹	۸۲/۰
E %	۱۶/۰۲	۱۸/۰۶	۱۴/۸
NRMSE	۰/۶۴	۰/۷۳	۰/۵۸



شکل ۸: مقادیر آزمایشگاهی موجود برای پارامتر Y برحسب متغیر X با استفاده از تئوری موج فوریه برای امواج نامنظم



شکل ۷: دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج‌شکن محاسبه شده توسط فرمول تحقیق حاضر در برابر نتایج آزمایشگاهی برای امواج منظم

برای بررسی کاربرد مفهوم شار تکانه موج جهت محاسبه فشار برای امواج نامنظم، در محاسبه پارامتر شار تکانه موج از جایگزینی مستقیم پارامترهای موج نامنظم در معادلات تجربی به‌دست آمده از تئوری‌های متفاوت از جمله موج خطی، موج خطی توسعه یافته و تقریب فوریه استفاده می‌شود. بدین منظور دو راهکار برای لحاظ نمودن پارامترهای موج نامنظم یعنی استفاده از تحلیل آماری (یعنی $H_{1/3}$ و T_m به‌عنوان ارتفاع و پریود موج) و دیگری استفاده از پارامترهای تحلیل طیفی (یعنی H_{m0} و T_p به‌عنوان ارتفاع و پریود موج) مطرح می‌شود. در تحقیق حاضر پیشنهاد می‌شود پارامترهای موج نامنظم بر اساس تحلیل آماری ($H_{1/3}$ و T_m) برای تخمین پارامتر شار تکانه موج استفاده شوند.

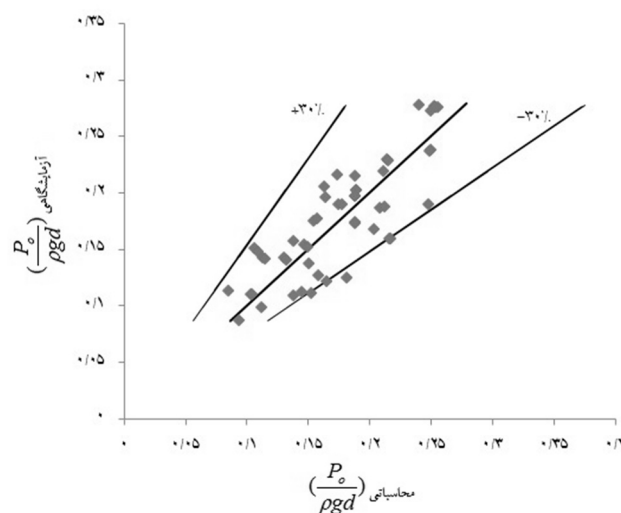
جدول ۴ مقادیر شاخص‌های ارزیابی برای نتایج به‌دست آمده با استفاده از تئوری‌های مختلف موج را برای امواج نامنظم نشان می‌دهد. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود برای موج نامنظم، شاخص‌های ارزیابی برای نتایج به‌دست آمده توسط تئوری موج فوریه مناسب‌تر از تئوری موج خطی و تئوری موج خطی بسط یافته است، به‌طوری‌که برای تئوری موج فوریه مقدار ضریب همبستگی برابر $۸۲/۰\%$ و مقدار درصد خطای نسبی (E) و جذر میانگین مربعات نرمالایز شده ($NRMSE$) به‌ترتیب برابر $۱۴/۸\%$ و $۵۸/۰\%$ به‌دست آمده‌اند. این مساله نشان از قابلیت مناسب‌تر تئوری موج فوریه در لحاظ نمودن آثار موج غیر سینوسی در برخورد با پدیده موردنظر است.

موج غیر سینوسی در برخورد با پدیده مورد نظر است. همچنین نتایج نشان دادند که ترم مربوط به مشارکت سرعت افقی ذره (u) در مقدار حداکثر شار تکانه موج بی بعد شده در کل عمق آب پای سازه (یعنی ترم $\frac{1}{gd^2} \int_{-d}^{\eta_{max}} u^2 dz$) بر اساس نتایج آزمایشگاهی برای امواج منظم و نامنظم حداکثر $\frac{3}{1}$ و $\frac{0}{83}$ درصد مقدار حداکثر شار تکانه موج بوده و این در حالی است که سهم بزرگی از مشارکت در مقدار حداکثر شار تکانه موج بی بعد شده مربوط به ترم مربوط به فشار یعنی $\frac{\bar{p}_d}{\rho g d}$ است.

منابع

- مقیم، م.ن؛ چگینی، و.؛ شفیعی فر، م.؛ آق تومان، پ.، ۱۳۸۹. بررسی مکانیسم‌ها و چگونگی رفتار موج شکن‌های سکویی شکل پذیر در برابر حمله امواج. نشریه اقیانوس شناسی، ۱ (۲): ۳۵-۴۲.
- Archetti, R.; Brocchini, M., 2002. An integral swash zone model with friction: an experimental and numerical investigation. *Coastal Engineering*, Elsevier, 45: 89-110.
- Biésel, F., 1950. Equations de l'écoulement non lent en milieu permeable. *La Houille Blanche*, No. 2.
- De Groot, M.B.; Yamazaki, H.; Van Gent M.; Kheyruri, Z., 1994. Pore pressures in rubble mound breakwaters. *Proceeding 24th International Conference on Coastal Engineering*, Kobe, Japan. ASCE, New York, 2: 1727-1738.
- Fenton, J.D., 1988. The numerical solution of steady water wave problems. *Computers and Geosciences*, Pergamon Press, Great Britain, 14: 357-368.
- Hughes, S.A., 2004a. Wave momentum flux parameter: A descriptor for nearshore waves. *Coastal Engineering Journal*, Elsevier, 51(11): 1067-1084.
- Hughes, S.A., 2004b. Estimation of wave run-up on smooth, impermeable slopes using the wave momentum flux parameter. *Coastal Engineering Journal*, Elsevier, 51(11): 1085-1104.
- Longuet-Higgins, M.S.; Stewart, R.W., 1964. Radiation stresses in water waves: a physical discussion, with applications. *Deep-Sea Research*, Pergamon Press,

مقادیر محاسبه شده دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن توسط فرمول تحقیق حاضر (روی محور افقی) در برابر نتایج آزمایشگاهی (روی محور قائم) برای داده‌های مربوط به امواج نامنظم در شکل ۹ نشان داده شده‌اند. نتایج نشان داده شده حاکی از عملکرد مناسب مفهوم شار تکانه موج برای تخمین دامنه تغییرات فشار تحت اثر امواج نامنظم است.



شکل ۹: دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن محاسبه شده توسط فرمول تحقیق حاضر در برابر نتایج آزمایشگاهی برای امواج نامنظم

۵. بحث و نتیجه گیری

در تحقیق حاضر جهت محاسبه دامنه تغییرات فشار مرجع ایجاد شده بر بدنه موج شکن توده سنگی از مفهوم فیزیکی شار تکانه موج برخوردی به صورت انتگرال گیری شار در عمق جریان پای سازه موج شکن برای امواج منظم و نامنظم استفاده شد. بر این اساس نتایج به دست آمده حاکی از قابلیت مناسب مفهوم فیزیکی شار تکانه موج در تخمین دامنه تغییرات فشار مرجع ایجاد شده روی بدنه موج شکن توده سنگی برای امواج منظم و نامنظم است. همین طور شاخص‌های ارزیابی جهت بررسی عملکرد مفهوم شار تکانه موج در تخمین دامنه تغییرات فشار ایجاد شده روی بدنه موج شکن در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی نشان دادند که برای موج منظم، نتایج حاصله از تئوری موج خطی و موج فوریه مناسب‌تر از تئوری موج خطی بسط یافته بوده در حالی که برای موج نامنظم، نتایج حاصل از تئوری موج فوریه مناسب‌تر از سایر تئوری‌های موج ارزیابی شد. این مساله نشان از قابلیت مناسب‌تر تئوری موج فوریه در لحاظ نمودن آثار

- of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, United Kingdom, 104: 119-137.
- Sobey, R.J., 1989. Variations on Fourier wave theory. International Journal for Numerical Methods in Fluids, John Wiley & Sons, 9: 1453-1467.
- Vanneste, D.; Troch, P., 2010. Experimental research on pore pressure attenuation in rubble – mound breakwaters. Proceeding of the International Conference on Coastal Engineering, ASCE, Shanghai, China: 2949-2959 PP.
- Great Britain, 11: 529-562.
- Melby, J.A.; Hughes, S.A., 2004. Armor stability based on wave momentum flux. Proceedings of Coastal Structures, American Society of Civil Engineering, Reston, Virginia, 53-65 PP.
- Moghim, M.N.; Alizadeh, F., 2014. Hydraulic stability of reshaping berm breakwaters using the wave momentum flux parameter. Coastal Engineering, Elsevier, 83: 56-64.
- Rienecker, M.M.; Fenton, J.D., 1981. A Fourier approximation method for steady water waves. Journal

