

توسعه مدل غیرهیدروستاتیک دو بعدی در قائم برای شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد

فاطمه چگینی*، مسعود منتظری نمین

دانشکده فنی، دانشگاه تهران

© نشریه علمی - پژوهشی اقیانوس‌شناسی ۱۳۸۹، تمامی حقوق این اثر متعلق به نشریه اقیانوس‌شناسی است.

چکیده

در این تحقیق، جزئیات توسعه یک مدل عددی دو بعدی و در قائم غیرهیدروستاتیک برای شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد ارائه شده است. معادلات حاکم بر این مدل، معادلات ناویر-استوکس انتگرال‌گیری شده در عرض هستند که با استفاده از روش حجم محدود و در مختصات کارترین گسسته‌سازی شده و به کمک روش پروجکشن (Projection) حل شده‌اند. مدل آشفتگی به‌کار رفته، مدل دو معادله‌ای $k-\epsilon$ است. در مدل توسعه داده شده، برای مدل‌سازی سطح آزاد آب ارتفاع سلولهای لایه آخر متغیر و متناسب با تراز سطح آب در نظر گرفته شده است. یکی از محاسن این مدل نسبت به مدل‌های توسعه داده شده در مختصات سیگما و منحنی الخط، بالاتر بودن سرعت آن است. لذا این مدل برای شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد در شرایطی که تغییرات تراز آب و بستر شدید نیست مناسب‌تر است. پس از توسعه، مدل برای شبیه‌سازی الگوی جریان و رقم سطح آب در مسایل مختلف مانند انتشار موج استوکس، شبیه‌سازی موج ایستاده و جریان عبوری از ترانشه به‌کار گرفته شده است. مقایسه نتایج عددی با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی، نشان می‌دهد که مدل ارائه شده در شرایطی که فرض فشار هیدروستاتیک صادق نیست، می‌تواند جریانهای با سطح آزاد را به‌خوبی شبیه‌سازی نماید.

کلمات کلیدی: مدل عددی، جریان دوبعدی در قائم، روش حجم محدود، ضمنی، جریان سطح آزاد، فشار غیرهیدروستاتیک

۱. مقدمه

فیزیکی است. برای مثال با کاهش ابعاد مش در راستای افق، فرض کوچک بودن مقیاس مش‌بندی در راستای قائم نسبت به افق از بین می‌رود. در این صورت به دلیل برقرار نبودن فرض فشار هیدروستاتیک ممکن است ترجیح دهیم معادلات ناویر استوکس را به صورت کامل حل نماییم.

مدلهای عددی موجود برای شبیه‌سازی جریانهای غیر ماندگار با سطح آزاد را می‌توان به دو دسته هیدروستاتیک و غیرهیدروستاتیک تقسیم کرد. مدل‌های هیدروستاتیک، بر این فرضیه استوارند که مؤلفه شتاب در جهت قائم نسبت به سایر مؤلفه‌های فشار در معادلات حاکم کوچک و قابل صرف‌نظر است. اگرچه این فرض برای

امروزه مدل‌های عددی به‌طور وسیعی برای مدل‌سازی جریان در محیط‌های آبی مانند رودخانه‌ها، خورها، دریاچه‌ها و اقیانوسها مورد استفاده قرار می‌گیرند. نتایج تحقیقات انجام شده در زمینه مدل‌سازی هیدرودینامیک دریاها و اقیانوسها، نشان می‌دهد که یکی از راههای بهبود و افزایش دقت مدل‌سازی، کاهش ابعاد مش‌بندی است (Marchuk et al., 2001). از سوی دیگر، کاهش ابعاد مش‌بندی، قاعدتاً، نیازمند افزایش توانایی مدل در شبیه‌سازی مشخصات

* پست الکترونیکی: cheginif@ut.ac.ir

نمین و همکاران (۲۰۰۱)، احمدی و همکاران (۲۰۰۷)،
(Street, Hodges., 1999) اشاره نمود.

یکی دیگر از نکات دارای اهمیت در حل عددی مسایل مبتنی بر عدم فرض فشار هیدروستاتیک، نحوه درگیر کردن سرعت و فشار است. زیرا مولفه‌های سرعت در هر سه معادله اندازه حرکت و پیوستگی حضور دارد، اما مولفه فشار فقط در دو معادله اندازه حرکت ظاهر می‌شود و معادله پیوستگی دارای ترم فشار نیست. از آنجا که میدان فشار معمولاً از قبل معلوم نیست، باید آن را به‌عنوان قسمتی از محاسبات استخراج کرد. در این راستا راهکارهای مختلفی از جمله روشهای اصلاح فشار مانند سیمپل (Patankar, 1980) و روش پروجکشن (Chorin, 1968) پیشنهاد شده است.

در این مقاله یک مدل غیرهیدروستاتیک دو بعدی و در قائم، برای شبیه‌سازی جریان غیر ماندگار با سطح آزاد ارائه شده است. معادلات حاکم بر این مدل، معادلات ناویر-استوکس انتگرال‌گیری شده در عرض هستند که با استفاده از روش حجم محدود و در مختصات کارتزین گسسته‌سازی شده و به کمک روش پروجکشن در دو مرحله حل شده‌اند. مدل توسعه یافته، با درگیر کردن معادله سینماتیک سطح آزاد آب و معادلات ناویر استوکس، میدان فشار را به‌صورت کامل حل می‌نماید. به‌منظور مدل‌سازی آشفتگی، مدل دو معادله‌ای $k-\varepsilon$ به‌کار گرفته شده است. در مدل توسعه داده شده، برای مدل‌سازی سطح آزاد آب، ارتفاع سلولهای لایه آخر متغیر و متناسب با تراز سطح آب در نظر گرفته شده است.

در مقاله حاضر، بخش دوم به بررسی معادلات حاکم و شرایط مرزی می‌پردازد. در بخش سوم جزئیات روش عددی به‌کار رفته در مدل ارائه شده و در بخش چهارم مدل توسعه داده شده با استفاده از سه آزمون مورد ارزیابی قرار گرفته است. مقایسه نتایج عددی با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی نشان می‌دهد که مدل ارائه شده در شرایطی که فرض فشار هیدروستاتیک صادق نیست، می‌تواند جریانهای با سطح آزاد را با دقت خوبی شبیه‌سازی نماید.

۲. معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان دو بعدی در قائم با انتگرال‌گیری از معادلات اندازه حرکت و معادله پیوستگی در عرض واحد و با تقسیم فشار کل (P) به دو جزء فشار هیدروستاتیک و فشار اضافی ρP^* ($P = -\rho g z + \rho P^*$)، به‌صورت زیر استخراج می‌شوند:

شبیه‌سازی جریان در شرایطی که مقیاس حرکت در جهت افق بسیار بیشتر از مقیاس حرکت در جهت قائم است کاربرد دارد (Wu, Yuan, 2004)؛ اما برای مدل‌سازی جریان در برخی شرایط لازم است که معادلات ناویر-استوکس به‌طور کامل حل شوند. از جمله این شرایط می‌توان به امواج با دوره‌ی تناوب کوتاه، تغییر ناگهانی در توپوگرافی بستر، تغییر ناگهانی در شیب بستر و جریان عبوری از سازه‌ها اشاره نمود (نمین و همکاران، ۲۰۰۱ و Chen, 2005).

در سالهای اخیر تلاش زیادی برای توسعه مدل‌های غیرهیدروستاتیک به‌منظور مدل‌سازی جریانهای با سطح آزاد صورت گرفته است. یکی از مشکلات اساسی در توسعه مدل‌های غیرهیدروستاتیک چگونگی تعریف شرط مرزی فوقانی (تراز سطح آزاد) است. در برخی از این مدل‌ها، موقعیت سطح آب با استفاده از روشهای پرهزینه‌ای مانند VOF و MAC تعیین می‌شوند. این روشها بر خلاف دقت مناسب عموماً هزینه محاسباتی بالایی دارند و دارای محدودیتهای پایداری هستند. از سوی دیگر محاسبات مذکور در شرایط جریان غیر ماندگار به‌مراتب افزایش می‌یابد. روش دیگری که گروهی از مدل‌های غیرهیدروستاتیک برای حل معادلات حاکم به‌کار می‌برند آن است که طبق پیشنهاد Casulli (۱۹۹۹)، فشار را به دو مولفه غیرهیدروستاتیک و هیدروستاتیک تقسیم می‌کنند (Mahadevan et al., 1996; Hodges, Wadzuk, 2004).

در این روش، ابتدا یک میدان سرعت میانی که معادله پیوستگی متوسط‌گیری شده در عمق را اغنا کند، محاسبه می‌شود. سپس میدان سرعت با استفاده از میدان فشار غیرهیدروستاتیک اصلاح شده تا معادله پیوستگی اغنا شود. به این مدل‌ها، مدل‌های شبه هیدروستاتیک نیز اطلاق می‌شود، زیرا موقعیت تراز سطح آب در هر گام زمانی، بدون در نظر گرفتن مولفه غیرهیدروستاتیک فشار در آن گام زمانی محاسبه می‌شود. گروه دیگری از مدل‌های غیرهیدروستاتیک میدان فشار را به‌صورت کامل حل می‌کنند و موقعیت تراز آب را با استفاده از شرط مرزی سینماتیک سطح آب به‌دست می‌آورند. در روش مورد نظر، با درگیر^۱ کردن همزمان معادلات حاکم بر جریان و شرط مرزی سینماتیک سطح آب، رقوم سطح آب در هر گام زمانی با هزینه محاسباتی کمی به‌همراه میدان سرعت و فشار استخراج می‌گردد. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های توسعه داده شده توسط نمین و معتمدی (۲۰۰۹)،

¹ Couple

که در آن V_i لزجت گردابه‌ای، k انرژی جنبشی آشفتگی، ε نرخ استهلاک و $c_\mu, \sigma_\varepsilon, \sigma_k, c_{2\varepsilon}, c_{1\varepsilon}, \sigma_i, c_{3\varepsilon}$ همگی ضرایب استاندارد معادله $k-\varepsilon$ هستند. علاوه بر آن:

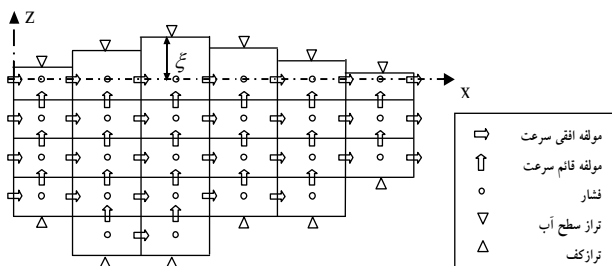
$$G = \beta \frac{f_i}{\rho} \frac{v_i}{\sigma_i} \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad \text{و} \quad P_r = v_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]$$

که β ضریب توسعه حجمی و f_i نیروهای بدنه‌ای هستند. مقادیر ضرایب استاندارد معادله $k-\varepsilon$ در (ردی ۱۹۸۰) آورده شده است.

۳. روش حل عددی

۱-۳ شبکه‌بندی

در تحقیق حاضر، فضای حل با استفاده از مختصات کارتیزین و شبکه با ساختار جابجا شده در جهت افق به N سلول با طول مساوی Δx و در جهت قائم به M سلول تقسیم شده است. ارتفاع همه سلولها به جز سلولهای لایه آخر مساوی Δz بوده و ارتفاع سلولهای لایه آخر متناسب با تراز سطح آب در نظر گرفته شده است. بسیاری از مدل‌های عددی غیرهیدروستاتیک توسعه یافته تغییرات تراز سطح آب را به کمک مختصات سیگما در نظر می‌گیرند (احمدی و همکاران ۲۰۰۷، یوان و وو ۲۰۰۴).



شکل ۱- نمای شبکه‌بندی و موقعیت مجهولات اصلی

در این مدلها، کل مش‌بندی فضای حل متناسب با تغییرات تراز سطح آب تغییر می‌کند اما در مدل حاضر فقط ارتفاع سلولهای لایه آخر متغیر بوده و در نتیجه حجم محاسبات کاهش می‌یابد. در نتیجه یکی از محاسن مختصات کارتیزین نسبت به مختصات سیگما و منحنی‌الخط هزینه محاسباتی کمتر آن است و لذا استفاده از این مختصات در شرایطی که تغییرات تراز آب و بستر شدید نیست، مناسب‌تر است. شکل (۱) نمای شبکه‌بندی و

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_i \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial P^*}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_i \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_i \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (۳)$$

که معادله (۱) معادله پیوستگی در صفحه قائم و معادلات (۲) و (۳) به ترتیب معادلات اندازه حرکت در جهت x و z هستند. در معادلات فوق، u و w به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای x و z ، V_i لزجت گردابه‌ای و ρ چگالی است.

۱-۲ شرایط مرزی

شرط مرزی سینماتیک در بستر نفوذناپذیر عبارت است از:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + w = 0 \quad (۴)$$

که در آن h تراز کف است. به همین ترتیب، شرط مرزی سینماتیک سطح آزاد به صورت معادله (۵) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = w \quad (۵)$$

که در آن ξ تراز سطح آب نسبت به سطح مبنا است. با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی (۱) در عمق و به‌کارگیری اصل لایبنتز به همراه شرایط سینماتیک (۴) و (۵) معادله (۶) برای سطح آزاد آب به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\xi} u dz = 0 \quad (۶)$$

۲-۲ مدل آشفتگی

در مدل توسعه یافته، برای مدلسازی آشفتگی از مدل استاندارد $k-\varepsilon$ استفاده شده است. معادلات مدل $k-\varepsilon$ به صورت معادله (۷) بیان می‌شوند.

$$\begin{cases} v_i = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \\ \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_r + G - \varepsilon \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P_r + c_{3\varepsilon} G) - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{cases} \quad (۷)$$

موقعیت مجهولات اصلی را نشان می‌دهد.

۲-۲-۳ گام دوم

۲-۳ روش عددی

پس از انتقال و پخش میدان سرعت و حذف ترمهای انتقال و پخش از معادلات اندازه حرکت، معادلات حاکم بر جریان به صورت معادلات (۱۲) تا (۱۴) به دست می‌آیند. لذا در گام دوم معادله پیوستگی (۱۲) و معادلات اندازه حرکت بدون در نظر گرفتن ترمهای انتقال و پخش (معادلات ۱۳ و ۱۴) به صورت همزمان حل شده و در نتیجه معادله‌ای بر حسب فشار، معروف به معادله پواسن بدست می‌آید. در معادلات زیر مقدار ψ بین صفر و یک است.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{n+1} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{**}}{\Delta t} + \psi \left(\frac{\partial P^*}{\partial x}\right)^{n+1} + (1-\psi) \left(\frac{\partial P^*}{\partial x}\right)^n = 0 \quad (13)$$

$$\frac{w^{n+1} - w^{**}}{\Delta t} + \psi \left(\frac{\partial P^*}{\partial z}\right)^{n+1} + (1-\psi) \left(\frac{\partial P^*}{\partial z}\right)^n = 0 \quad (14)$$

با گسسته سازی معادلات (۱۳) و (۱۴) می‌توان مولفه‌های سرعت در جهت x و z را با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) بیان کرد.

$$\begin{cases} u_{i+1/2,k}^{n+1} = u_{i+1/2,k}^{**} - \psi \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i+1,k}^{*n+1} - P_{i,k}^{*n+1}) - (1-\psi) \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i+1,k}^{*n} - P_{i,k}^{*n}) \\ u_{i-1/2,k}^{n+1} = u_{i-1/2,k}^{**} - \psi \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i,k}^{*n+1} - P_{i-1,k}^{*n+1}) - (1-\psi) \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i,k}^{*n} - P_{i-1,k}^{*n}) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} w_{i,k+1/2}^{n+1} = w_{i,k+1/2}^{**} - \psi \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,k+1}^{*n+1} - P_{i,k}^{*n+1}) - (1-\psi) \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,k+1}^{*n} - P_{i,k}^{*n}) \\ w_{i,k-1/2}^{n+1} = w_{i,k-1/2}^{**} - \psi \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,k}^{*n+1} - P_{i,k-1}^{*n+1}) - (1-\psi) \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,k}^{*n} - P_{i,k-1}^{*n}) \end{cases} \quad (16)$$

سرانجام با گسسته‌سازی مکانی معادله پیوستگی به صورت رابطه (۱۷) و جایگذاری مقادیر سرعت گام زمانی جدید در این رابطه، معادله پواسن تشکیل می‌شود (رابطه ۱۸).

$$\frac{u_{i+1/2,k}^{n+1} - u_{i-1/2,k}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{w_{i,k+1/2}^{n+1} - w_{i,k-1/2}^{n+1}}{\Delta z} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & 2\psi\Delta t \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) P_{i,k}^{*n+1} - \psi \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (P_{i+1,k}^{*n+1} + P_{i-1,k}^{*n+1}) \\ & - \psi \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} (P_{i,k+1}^{*n+1} + P_{i,k-1}^{*n+1}) = \frac{w_{i,k-1/2}^{**} - w_{i,k+1/2}^{**}}{\Delta z} + \frac{u_{i+1/2,k}^{n+1} - u_{i-1/2,k}^{n+1}}{\Delta x} \\ & + (1-\psi)\Delta t \left(\frac{P_{i+1,k}^{*n} - 2P_{i,k}^{*n} + P_{i-1,k}^{*n}}{\Delta x^2} \right) + (1-\psi)\Delta t \left(\frac{P_{i,k+1}^{*n} - 2P_{i,k}^{*n} + P_{i,k-1}^{*n}}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

در مدل عددی توسعه داده شده، معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود گسسته سازی شده و با به‌کارگیری روش پروجکشن حل شده‌اند. این روش منجر به حل معادلات در دو گام اصلی می‌گردد. در گام نخست با نادیده گرفتن جمله فشار از طریق معادله‌های اندازه حرکت یک میدان سرعت میانی محاسبه شده و در گام دوم به کمک سرعت‌های میانی و این بار از طریق معادله پیوستگی، مقادیر فشار و سپس تراز سطح آب و سرعت‌های گام زمانی جدید محاسبه می‌شوند.

۱-۲-۳ گام اول

در گام اول، معادلات اندازه حرکت بدون در نظر گرفتن ترم فشار حل می‌شوند. این گام شامل دو مرحله «انتقال» و «پخش» است. در مرحله اول (مرحله انتقال) سرعت‌ها با استفاده از میدان سرعت معلوم از گام زمانی قبل منتقل شده و مقادیر میانی u^* و w^* به دست می‌آید.

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right]^n \quad (8)$$

$$\frac{w^* - w^n}{\Delta t} = \left[\frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right]^n \quad (9)$$

در توسعه مدل حاضر از روش Fromm که روشی صریح، بادسو و با درجه دقت مرتبه دوم است برای حل معادلات انتقال (۸) و (۹) استفاده شده است. پس از حل معادلات انتقال، در مرحله دوم ترم پخش معادلات اندازه حرکت حل می‌شود و مقادیر میانی جدید u^{**} و w^{**} به دست می‌آید.

$$\frac{u^{**} - u^*}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial u^{**}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial u^{**}}{\partial z} \right) \quad (10)$$

$$\frac{w^{**} - w^*}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial w^{**}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial w^{**}}{\partial z} \right) \quad (11)$$

در این تحقیق، معادلات پخش (۱۰) و (۱۱) به کمک روش ضمنی کرنک نیکلسون حل شده‌اند.

با به‌کار بردن معادله پیوستگی می‌توان ثابت کرد که:

$$w_{i,nk-1/2}^{n+1} = -\frac{\Delta z}{\Delta x} \sum_{k=1}^{nk-1} (u_{i+1/2,k}^{n+1} - u_{i-1/2,k}^{n+1}) \quad (20)$$

علاوه بر آن، با فرض فشار هیدروستاتیک برای لایه آخر داریم:

$$\xi_i^{n+1} = \frac{P_{i,nk}^{*n+1}}{g} \quad (21)$$

در نتیجه، با جای‌گذاری روابط (۱۵)، (۱۶)، (۲۰) و (۲۱) در رابطه (۱۹)، معادله پواسن برای سلولهای لایه آخر بر حسب فشار سلولهای ستون i - ام به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{g\Delta t} + \psi \frac{\Delta t}{\Delta z} + \psi \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\Delta h_{i-1/2} + \Delta h_{i+1/2}) \right) P_{i,nk}^{*n+1} \\ & - \psi \frac{\Delta t}{\Delta z} P_{i,nk-1}^{*n+1} - \psi \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\Delta h_{i-1/2} P_{i-1,nk}^{*n+1} + \Delta h_{i+1/2} P_{i+1,nk}^{*n+1}) \\ & = w_{i,nk-1/2}^{**} + \frac{\Delta h_{i-1/2} u_{i-1/2,nk}^{**} - \Delta h_{i+1/2} u_{i+1/2,nk}^{**}}{\Delta x} + \\ & \frac{\xi_i^n}{\Delta t} - (1-\psi) \frac{\Delta t}{\Delta z} (P_{i,nk}^{*n} - P_{i,nk-1}^{*n}) + \\ & (1-\psi) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [\Delta h_{i+1/2} (P_{i+1,nk}^{*n} - P_{i,nk}^{*n}) - \Delta h_{i-1/2} (P_{i,nk}^{*n} - P_{i-1,nk}^{*n})] \end{aligned} \quad (22)$$

لازم به ذکر است که در سلولهای مرزی معادله پواسن متناسب با شرایط مرزی استخراج می‌شوند. برای مثال در مرز ورودی با سرعت معلوم، در معادله پیوستگی مقدار $u_{i-1/2,k}^{n+1} = u_b$ قرار داده شده و ضرایب معادله فشار بر این اساس به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب در مرز صلب بستر $w_{i,k-1/2} = 0$ و در مرز خروجی گردانید صفر $u_{i+1/2,k} = u_b$ در نظر گرفته می‌شود.

۳-۲-۴ حل دستگاه معادلات

پس از به‌دست آوردن معادله پواسن برای همه سلولهای فضای حل، دستگاه معادلات فشار تشکیل داده شده و با حل این دستگاه به یکی از روشهای تکراری (غیر مستقیم) و یا مستقیم، میدان فشار در گام زمانی جدید محاسبه می‌شود. در روشهای تکراری، مقادیر فشار در هر گام زمانی پس از همگرایی تکرارهای نسبتاً زیاد به‌دست می‌آید. در روش مستقیم، مقادیر فشار به‌صورت مستقیم و بدون هیچگونه حدسی به‌دست می‌آیند. در صورت نبود تدابیر مناسب، این روش حل دستگاه معادله‌ها مستلزم معکوس کردن ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگ خواهد بود که عموماً دارای هزینه

برای حل معادلات بیضوی گسسته شده، شرایط مرزی در مرزهای میدان محاسباتی مورد نیاز است. در مدل حاضر در مرز ورودی از مقدار معلوم سرعت یا دبی و پارامترهای آشفتگی استفاده شده است. در مرز خروجی با فرض جریان توسعه یافته، متغیرها با شرط مرزی نیومن:

$$\frac{\partial}{\partial n} = 0$$

که عبارت از صفر بودن گردانید عمود بر مرز خروجی برای کلیه متغیرها است تعیین شده‌اند. در مرزهای صلب نیز با توجه به فرض عدم لغزش از شرط درپشته برای سرعتها و از روش تابع دیواره برای پارامترهای آشفتگی استفاده شده است. در سطح آب در غیاب تنش برشی سطحی ناشی از باد، گردانید مؤلفه افقی سرعت و انرژی جنبشی آشفتگی صفر و نرخ اتلاف آشفتگی از رابطه $\varepsilon = k^{3/2} / 0.43d$ (عمق جریان است) و سرعت w از معادله (۵) محاسبه شده است.

در مدل حاضر برای محاسبه رقوم سطح آب، معادله شرط مرزی سینماتیک سطح آزاد آب به صورت ضمنی به معادله فشار متصل شده و ضمن پرهیز از محاسبات اضافی، رقوم سطح آب در هر گام زمانی به‌همراه میدان سرعت و فشار مستقیماً از معادلات حاکم استخراج می‌گردد. در این مدل، برای مدلسازی سطح آزاد آب ارتفاع سلولهای لایه آخر متغیر و متناسب با تراز سطح آب در نظر گرفته شده است. علاوه بر آن، از فرض فشار هیدروستاتیک برای بدست آوردن فشار سلولهای لایه آخر استفاده شده است. به‌دلیل متغیر بودن ارتفاع سلولهای لایه آخر، نمی‌توان از معادله پیوستگی (۱۲) به‌عنوان معادله حاکم بر این سلولها استفاده نمود. لذا لازم است معادله پواسن متفاوتی با معادله (۱۸) برای سلولهای لایه آخر استخراج شود. بدین منظور ابتدا پس از گسسته‌سازی معادله (۶)، معادله پیوستگی ستون i ام را به‌صورت رابطه (۱۹) بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_i^{n+1} - \xi_i^n}{\Delta t} + \\ & \frac{\Delta z}{\Delta x} \sum_{k=1}^{nk-1} (u_{i+1/2,k}^{n+1} - u_{i-1/2,k}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta x} (\Delta h_{i+1/2} u_{i+1/2,nk}^{n+1} - \Delta h_{i-1/2} u_{i-1/2,nk}^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن nk تعداد لایه‌ها و Δh ارتفاع سلول لایه آخر است

$$(\Delta h = \frac{\Delta z}{2} + \xi)$$

این آزمونها، آزمون انتشار موج، آزمون موج ایستاده و آزمون جریان عبوری از ترانسه است.

۴-۱ آزمون انتشار موج استوکس

در این آزمون، امواج کم‌دامنه، در طول یک فلوم به طول ۳۰۰ و عمق ۵ متر و از سمت چپ به راست منتشر می‌شوند. برای تولید امواج، تراز آب مرز سمت چپ با استفاده از رابطه (۲۵) به صورت سینوسی تغییر می‌کند. مقادیر در نظر گرفته شده برای دامنه و دوره تناوب موج به ترتیب ۰.۰۵ متر و ۱۰ ثانیه است.

$$\eta = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (25)$$

در رابطه بالا T دوره تناوب موج و a دامنه موج است. در این آزمون $\Delta x = 1m$ ، $\Delta z = 0.2m$ و ارتفاع لایه آخر بین ۵ تا ۱۵ سانتیمتر در نظر گرفته شده است. علاوه بر آن، برای گسسته‌سازی معادلات اندازه حرکت، مقدار ضریب μ مساوی ۰/۵ فرض شده است. لازم به ذکر است که در صورتی که مقدار ضریب μ مساوی ۱ در نظر گرفته شود، تراز سطح آب بدست آمده توسط مدل به تدریج مستهلک می‌شود (Ullmann, 2008). از آنجا که در این آزمون، ارتفاع موج در مقایسه با طول آن خیلی کوچک است، می‌توان معادلات حاکم بر حرکت موج را خطی و به صورت تحلیلی حل کرد. پس از حل معادلات، طول موج، سرعت موج و تراز سطح آب را می‌توان به ترتیب از روابط (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) محاسبه کرد.

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (26)$$

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (27)$$

$$\eta = a \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \quad (28)$$

در این روابط، L طول موج، d عمق آب و T دوره تناوب موج است. با توجه به روابط فوق طول و سرعت موج انتشار یافته به ترتیب برابر ۶۷/۷ متر و ۶/۷۷ متر بر ثانیه محاسبه شده که با نتایج مدل همخوانی دارند. علاوه بر آن، به منظور ارزیابی عملکرد مدل، نتایج تراز آب به دست آمده توسط مدل در مقایسه با حل تحلیلی

محاسباتی بالایی است. در مدل حاضر، از روش مستقیم برای حل دستگاه معادلات استفاده شده است. بدین منظور، برای سهولت حل دستگاه معادلات از خاصیت بلوکی بودن ماتریس مجهولات استفاده شده است که در ادامه جزئیات نحوه تشکیل این ماتریس ارائه شده است.

به منظور تشکیل دستگاه معادلات، رابطه (۲۰) برای سلولهای $k=1,2,\dots,nk-1$ ستون i ام و رابطه (۲۱) برای سلول nk ام ستون i ام نوشته می‌شود. بدین ترتیب برای هر ستون، دستگاه معادلات زیر تشکیل می‌گردد:

$$\overline{A}_i \overline{P}_{i-1}^{*n+1} + \overline{B}_i \overline{P}_i^{*n+1} + \overline{C}_i \overline{P}_{i+1}^{*n+1} = \overline{D}_i \quad (23)$$

که در معادله بالا:

$$\overline{P}_i^{*n+1} = [P_{i,1}^{*n+1}, P_{i,2}^{*n+1}, \dots, P_{i,nk}^{*n+1}]$$

بردار مجهولات مقادیر فشار ستون i ام و \overline{A}_i ، \overline{B}_i و \overline{C}_i ماتریسهای ضرایب فشار هستند. پس از نوشتن معادله (۲۳) برای همه ستونها، ماتریس سه قطری بلوکی به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \overline{B}_1 & \overline{C}_1 & & & & \\ \overline{A}_2 & \overline{B}_2 & \overline{C}_2 & & & \\ & & \dots & \dots & & \\ & & & \overline{A}_i & \overline{B}_i & \overline{C}_i \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & \overline{A}_{nk} & \overline{B}_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \dots \\ \overline{X}_i \\ \dots \\ \overline{X}_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_1 \\ \overline{D}_2 \\ \dots \\ \overline{D}_i \\ \dots \\ \overline{D}_{nk} \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن $\overline{X}_i = \overline{P}_i^{*n+1}$ بردار مجهولات است. برای حل دستگاه معادلات فوق می‌توان از روشی مشابه الگوریتم توماس و یا روشهای دیگری که برای حل دستگاه معادلات سه قطری بلوکی ارائه شده است، استفاده نمود.

در نهایت پس از محاسبه مقادیر فشار، میدان سرعت در گام زمانی $n+1$ به کمک روابط (۱۵) و (۱۶) و تراز سطح آب در گام زمانی جدید از رابطه (۲۱) محاسبه می‌گردد.

۴. ارزیابی مدل

پس از تهیه مدل عددی، جهت حصول اطمینان از عملکرد صحیح مدل و بررسی صحت نتایج حاصل از آن، مدل به کمک آزمونهای مختلف متداول مورد ارزیابی قرار گرفته است. از جمله

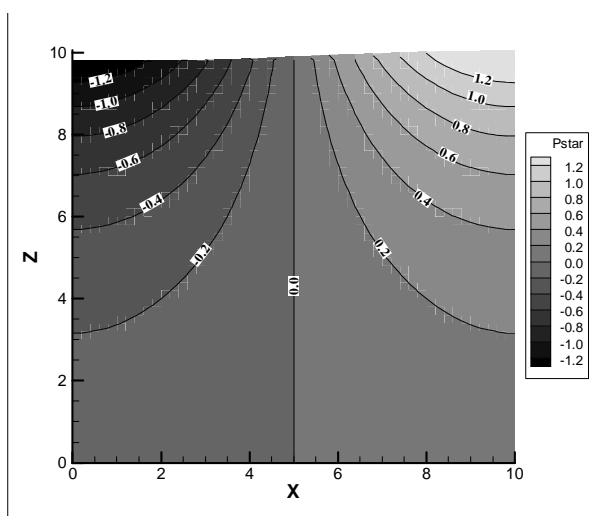
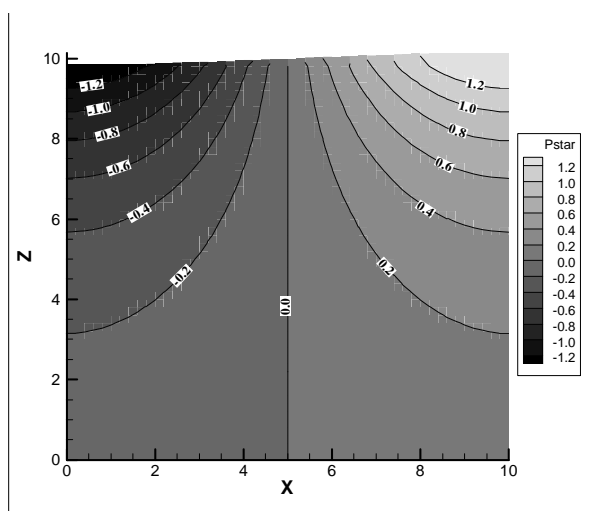
در شکل (۲) ارائه شده است. صحت مدل، مقادیر فشار اضافی (ρP^*) به دست آمده توسط مدل، با مقادیر تحلیلی آن مقایسه شده است (شکل ۴). طبق رابطه تحلیلی، میدان فشار حاصل از موج ایستاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P = -\rho g z + \rho g K_p(z) \eta = -\rho g z + \rho P^* \quad (30)$$

که در رابطه فوق:

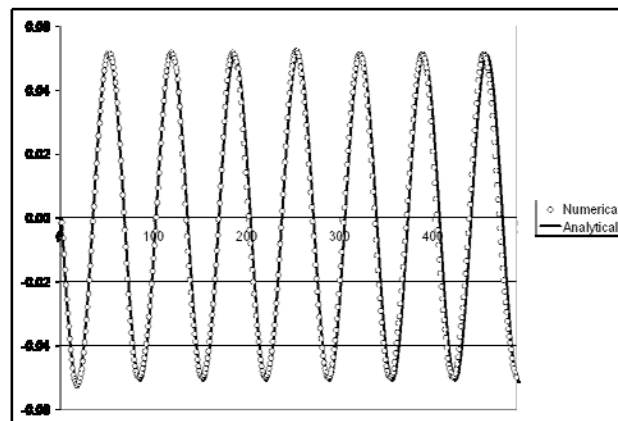
$$\eta = \frac{A}{2} \cos(kx) \cos(\sigma t) \quad \text{و} \quad K_p(z) = \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)}$$

است. علاوه بر آن، $k = \frac{2\pi}{L}$ و $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ است.



شکل ۴- مقدار ρP^* حاصل از موج ایستاده: مقایسه نتایج عددی (تصویر بالا) و تحلیلی (تصویر پایین) پس از ۷ ثانیه (بر حسب KPa)

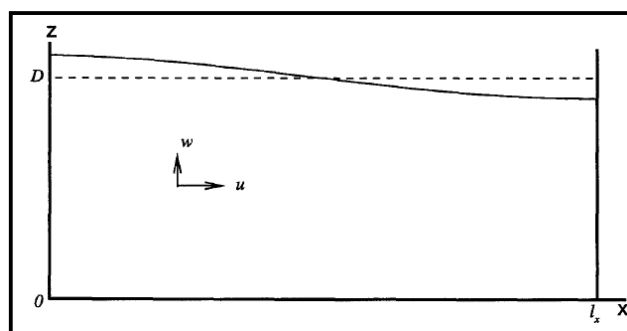
در شکل (۲) ارائه شده است.



شکل ۲- مقایسه نتایج عددی تراز سطح آب با نتایج حل تحلیلی

۲-۴- آزمون موج ایستاده

یکی از کاربردهای مدل هیدرودینامیک، تعیین فشار غیرهیدروستاتیک وارد بر دیوار مخازن در اثر تشکیل امواج ایستاده است. بدین منظور در تحقیق حاضر، موجی ایستاده در مخزنی به طول و عمق ۱۰ متر در شبیه‌سازی شده است. برای تشکیل موج ایستاده، تراز اولیه سطح آب مخزن به صورت سینوسی (شکل ۳) و به کمک رابطه (۲۹) تعیین شده است.

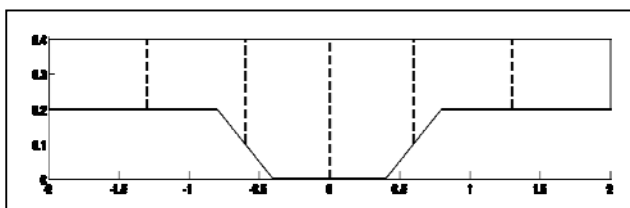


شکل ۳- سطح اولیه آب اعمال شده برای تشکیل موج ایستاده در مخزن

$$\eta = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \quad (29)$$

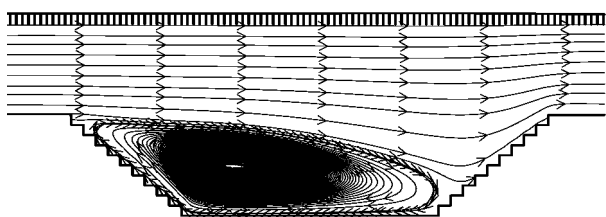
در رابطه فوق A ارتفاع موج و L طول موج است که در این آزمون طول موج دو برابر طول مخزن (۲۰ متر) و ارتفاع آن ۳۰ سانتیمتر در نظر گرفته شده است. فضای حل به سلولهایی با طول و عرض مساوی ۰.۲ متر تقسیم شده است. به منظور اطمینان از

۰/۰۵۷ متر مکعب بر ثانیه است.



شکل ۶- مقاطع مورد مقایسه نتایج مدل عددی و آزمایشگاهی

به منظور ارزیابی عملکرد مدل توسعه یافته، جریان در ترانسه با استفاده از مدل شبیه‌سازی شده و با نتایج آزمایشگاهی برای حالت عمق آب ۰/۲ متر، مقایسه گردیده است. بدین منظور طول ۶ متر برای مدل‌سازی در نظر گرفته شده است. ابعاد مش در جهت افق و قائم برابر ۰/۰۲ متر و گام زمانی برابر ۰/۰۲۵ ثانیه است. در مرز بالادست مقدار دبی معلوم و در مرز پایین دست مقدار فشار معلوم اعمال گردیده است. برای مدل‌سازی آشفتگی از مدل $k-\epsilon$ استفاده شده است. برای جلوگیری از هر گونه انعکاس موج، دبی معلوم به‌طور خطی از صفر تا مقدار ۰/۰۵۷ متر مکعب بر ثانیه افزایش یافته است. الگوی جریان شبیه‌سازی شده توسط مدل عددی در شکل (۷) و نتایج مقایسه مولفه افقی سرعت به‌دست آمده توسط مدل عددی و آزمایشگاهی در شکل (۸) ارائه شده است.



شکل ۷- میدان جریان شبیه‌سازی شده در ترانسه توسط مدل عددی

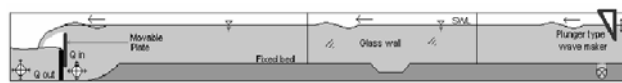
همان‌طور که مشاهده می‌شود، در برخی موارد نیم‌رخ حاصل از مدل عددی با مقادیر آزمایشگاهی دارای اختلاف است که این به دلیل عدم توانایی مدل $k-\epsilon$ استاندارد در شبیه‌سازی دقیق جریانهای چرخشی است. علاوه بر آن، به دلیل استفاده از مختصات کارتیزین در مدل، سطح شیب‌دار به‌صورت پله‌ای مدل شده و این امر باعث ایجاد خطا می‌شود.

مقایسه نتایج مدل و نتایج تحلیلی، توانایی مدل در تعیین فشار هیدرودینامیک در شرایطی که مقیاس حرکت در جهت قائم نسبت به مقیاس حرکت در جهت افق قابل صرف‌نظر نیست را تایید می‌کند. در این مسئله نسبت عمق آب به طول موج (۰/۵) مبین آن است که نمی‌توان از مؤلفه شتاب در جهت قائم صرف‌نظر نمود.

لازم به ذکر است که یکی از محاسن استفاده از روش مستقیم ماتریس سه قطری بلوکی برای حل معادله فشار نسبت به روشهای غیرمستقیم، هزینه محاسباتی کمتر آن است. برای مثال در آزمون موج ایستاده، در صورتی که تعداد سلولهای فضای حل در جهت قائم و افق یکسان باشد، سرعت اجرای مدل با به‌کارگیری روش مستقیم حدود دو برابر روش تکراری BICGSTAB است. این اختلاف با افزایش تعداد سلولها در جهت افق نسبت به قائم بیشتر می‌شود. در نتیجه، مدل حاضر نسبت به مدلهایی که از روش تکراری برای حل معادلات فشار استفاده می‌کنند دارای هزینه محاسباتی کمتری است.

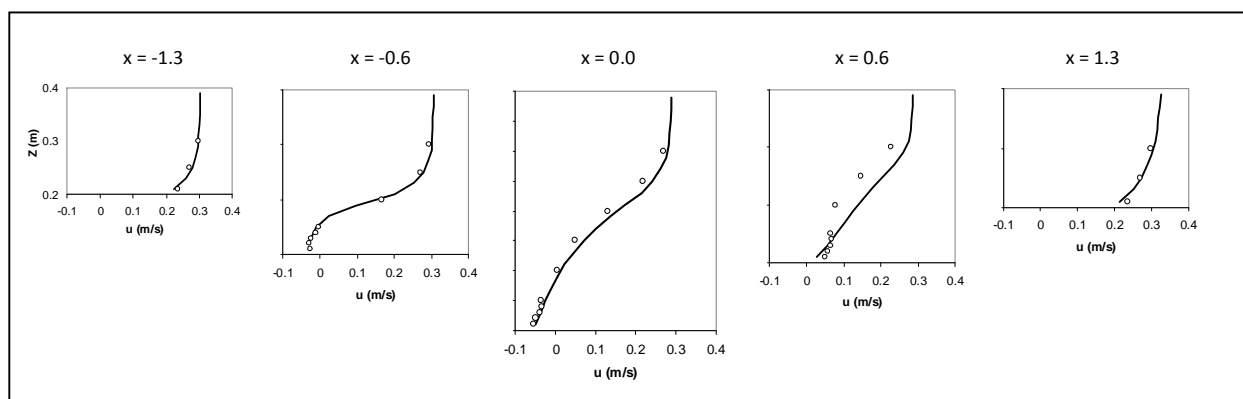
۳-۴ آزمون جریان در ترانسه

برای مطالعه جریان در اطراف کانالهای دسترسی بنادر در شرایط مختلف موج و جریانهای جزر و مدی مدلی آزمایشگاهی در موسسه تحقیقات آب ساخته شد (ذاکر، ۱۳۸۵). تجهیزات آزمایشگاهی در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۵- جانمایی تجهیزات آزمایشگاهی (بدون مقیاس)

در آزمایشات انجام شده، با ثابت نگه داشتن صفحه متحرک و پرکردن فلوم تا تراز مورد نیاز جریان دائمی در ترانسه به‌دست آمده است. دبی از طرف چپ پمپ شده است و همان مقدار دبی از طرف راست فلوم با پمپاژ خارج شده است. جریان دائمی برای سه عمق آب مختلف ۰/۲، ۰/۴ و ۰/۶ متر حاصل شده و سرعتها در پنج مقطع مختلف ۱/۳، -۰/۶، ۰/۰، ۰/۶ و ۱/۳ متر نسبت به مرکز ترانسه برداشت شده است. محل این مقاطع در شکل (۶) ارائه گردیده است. مقدار دبی عبوری برای هر سه حالت برابر



شکل ۸. مقایسه مولفه افقی سرعت به دست آمده توسط مدل عددی (خطوط پر) و آزمایشگاهی (نقاط)

آخر متغیر و متناسب با تراز سطح آب در نظر گرفته شده است. پس از توسعه، مدل برای شبیه‌سازی الگوی جریان و رقوم سطح آب در مسایل مختلف مانند انتشار موج استوکس، جریان عبوری از ترانسه و شبیه‌سازی موج ایستا بکار گرفته شده است. مقایسه نتایج مدل با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی، نشان می‌دهد در شرایطی که تغییرات سطح آب و بستر شدید نیست، مدل ارائه شده از توانایی و دقت قابل قبولی برای شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد برخوردار است.

۶. تشکر و قدردانی

بدینوسیله از شرکت سهامی مدیریت منابع آب وزارت نیرو که از این تحقیق تحت پروژه RIV5-85093 حمایت مالی کرده است تقدیر و تشکر می‌شود.

منابع

- حسینی، م. و ابریشمی، ج: ۱۳۷۹. هیدرولیک کانالهای باز (ویرایش دوم)، مشهد. دانشگاه امام رضا (ع).
- ذاکر، ه. ۱۳۸۵. رسوبگذاری کانالهای لایروبی شده بنادر تحت اثر موج و جریان جزر و مدی. پایان نامه دکتری، دانشگاه تربیت مدرس.
- Ahmadi, A.; Badiei, P. and Namin, M.M. 2007. An Implicit two-dimensional non hydrostatic model for free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 54 (9): 1055-1074.

۵. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، جزئیات توسعه یک مدل عددی دو بعدی و در قائم غیرهیدروستاتیک برای شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد ارائه شده است. معادلات حاکم بر این مدل، معادلات ناویر-استوکس انتگرال‌گیری شده در عرض هستند که با استفاده از روش حجم محدود و در مختصات کارتیزین گسسته‌سازی شده‌اند. یکی از محاسن این مدل نسبت به مدل‌های توسعه داده شده در مختصات سیگما و منحنی الخط، بالاتر بودن سرعت آن است. لذا این مدل برای شبیه‌سازی جریانهای با سطح آزاد در شرایطی که تغییرات تراز آب و بستر شدید نیست مناسب‌تر است. در مدل حاضر برای مدل‌سازی آشفتگی از مدل دو معادله‌ای $k-\epsilon$ استفاده شده است.

معادلات حاکم بر مدل با استفاده از روش پروجکشن در دو گام اصلی حل شده‌اند. در گام اول، مولفه فشار از معادلات اندازه حرکت حذف شده و با انتقال و پخش مولفه‌های افقی و قائم سرعت، میدان سرعت میانی به دست می‌آید. در گام دوم، با حل همزمان معادله پیوستگی و معادلات اندازه حرکت (بدون در نظر گرفتن ترمهای انتقال و پخش)، دستگاه معادلات سه قطری بلوکی حاصل می‌گردد. این دستگاه معادلات را می‌توان به راحتی با استفاده از روش‌های مستقیم و به صورت ضمنی حل کرد. در مدل حاضر برای محاسبه رقوم سطح آب، معادله شرط مرزی سینماتیک سطح آزاد آب به صورت ضمنی به معادله فشار متصل شده و با هزینه محاسباتی کمی، رقوم سطح آب در هر گام زمانی به همراه میدان سرعت و فشار مستقیماً از معادلات حاکم استخراج می‌گردد. در این مدل، برای مدل‌سازی سطح آزاد آب ارتفاع سلولهای لایه

- of Engineering. Cardiff University.
- Namin, M.M.; Lin, B. and Falconer, R.A. 2001. An implicit algorithm for solving non-hydrostatic free-surface flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 35: 341-356.
- Namin, M.M.; Motamedi, K. 2009. A non-hydrostatic free surface 2D vertical model using discrete singular convolution (DSC) method. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering*. 33: 95-108.
- Patankar, S.V. 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere. Washington D.C.
- Rodi, W. 1980. *Turbulence models and their applications in hydraulics*. State of the Art Paper. IAHR.
- Ullmann, S. 2008. *Three-dimensional computation of non-hydrostatic free-surface flows*, M. Sc. Thesis, Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science. Delft University of Technology.
- Wadzuk, M.; Hodges, B.R. 2004. *Hydrostatic and non-hydrostatic internal wave models*. Final Report to ONR. CRWR Online Report 04-09, U. Texas Austin, Available from: <<http://www.crwr.utexas.edu/online.shtml>>.
- Yanenko, N.N. 1971. *The method of fractional step*. Springer-Verlag.
- Yuan, H. and Wu, C.H. 2004. A two-dimensional vertical non-hydrostatic σ model with an implicit method for free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 44: 811-835.
- Casulli, V. 1999. A Semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic free surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 30: 425-440.
- Chen, X.J. 2005. A Comparison of hydrostatic and nonhydrostatic pressure components in seiche oscillations. *Mathematical and Computer Modeling*. 41: 887-902.
- Chorin, A.J. 1968. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 22: 745-763.
- Hodges, B.R. and Street, R.L. 1999. On simulation of turbulent nonlinear free surface flows. *Journal of Computational Physics*. 151: 425-457.
- Labeur, R.J. and Piertzak, J.D. 2005. A fully three dimensional unstructured grid non-hydrostatic finite element coastal model. *Ocean Modelling*: 51-67
- Mahadevan, A.; Olinger, J. and Street, R. 1996. A nonhydrostatic mesoscale ocean model. Part II: Numerical implementation. *Journal of Physical Oceanography*. 26: 1860-1900.
- Marchuk, G. I.; Siindermann, J. and Zalesny, V. B. 2001. *Mathematical modeling of marine and oceanic currents*. Russian. *Journal for Numerical and Analytical Mathematical. Modelling*. 16 (4): 331-362.
- Namin, M.M. 2004. *A fully three-dimensional non-hydrostatic free surface flow model for hydro-environmental prediction*. Ph.D. Thesis, Cardiff School