

## شبیه‌سازی انتشار موج تنها به روش بدون شبکه با استفاده از توابع پایه نمایی

سید مهدی زندی<sup>۱</sup>، امین رفیع‌زاده<sup>۲</sup>، احمد شانه‌ساززاده<sup>۳\*</sup>

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، پست الکترونیکی: [s.m.zandi@eng.ui.ac.ir](mailto:s.m.zandi@eng.ui.ac.ir)  
۲- کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، پست الکترونیکی: [amin.rafizadeh@eng.ui.ac.ir](mailto:amin.rafizadeh@eng.ui.ac.ir)  
۳- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان، پست الکترونیکی: [a.shanehsazzadeh@eng.ui.ac.ir](mailto:a.shanehsazzadeh@eng.ui.ac.ir)

تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۷

\* نویسنده مسوول

تاریخ دریافت: ۹۴/۵/۲۲

© نشریه علمی - پژوهشی اقیانوس شناسی ۱۳۹۵، تمامی حقوق این اثر متعلق به نشریه اقیانوس شناسی است.

### چکیده

این مقاله با هدف بررسی مشخصه انتشار سونامی در دریا و اقیانوس توسط یک روش عددی انجام شد. در بررسی پدیده انتشار سونامی عموماً تئوری امواج تنها مورد توجه قرار می‌گیرد. برای شبیه‌سازی انتشار موج تنها در سیال دارای سطح آزاد یک روش بدون شبکه توابع پایه نمایی توسعه داده شده است. فرمول‌بندی روش ارائه شده بر اساس بیان لاگرانژی معادلات ناویر-استوکس برای سیال غیرلزج تراکم‌ناپذیر بر مبنای فشار است. بر این اساس، معادله لاپلاس فشار در هر گام زمانی با استفاده از روش بدون شبکه توابع پایه نمایی حل می‌شود. پس از آن، با توجه به فرمول‌بندی لاگرانژی حرکت، هندسه حل بهنگام می‌شود و حل در زمان پیش می‌رود. با توجه به اینکه هندسه حل در طول زمان تغییر می‌کند، بدون شبکه بودن روش نوین ارائه شده به علت عدم نیاز به تولید شبکه در هر گام زمانی، به لحاظ صرفه جویی در زمان و هزینه محاسبات بسیار درخور توجه است. دقت قابل ملاحظه نتایج بدست آمده برای انتشار موج قبل از شکست در مقایسه با اطلاعات آزمایشگاهی مورد بررسی و تایید قرار گرفت.

کلمات کلیدی: موج تنها، روش بدون شبکه، توابع پایه نمایی، فرمول‌بندی لاگرانژی، سیال غیرلزج.

### ۱. مقدمه

تناوب طولانی و طول‌موج بلند است، بنابراین این پدیده معمولاً به صورت یک موج تنها<sup>۱</sup> مورد مطالعه قرار می‌گیرد (Goring, 1978; Synolakis, 1987). موج تنها یا تک اولین بار توسط John Scott Russel (1834) معرفی شد. این موج که توسط سیستمی از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود، در روند

سونامی از جمله امواج دریایی است که به علت یک آشفتگی بزرگ در سطح آب عمدتاً ناشی از جابجایی و لغزش بستر حاصل می‌شود. از جمله شرایط ژئوفیزیکی تولید این موج زمین-لرزه، رانش زمین، فوران آتشفشان و هر نوع تغییرات در بستر دریا است. این امواج بزرگ در سواحل می‌توانند خسارات جانی و مالی زیادی به بار آورند. از آنجایی که سونامی دارای دوره

<sup>1</sup> Solitary wave

علت وجود سلول‌های محاسباتی زیاد در روند حل است (Dutykh et al., 2011).

Guizien و Barthelemy (۲۰۰۲) یک روش جدید آزمایشگاهی برای تولید موج تنها توسط موج‌ساز پیستونی ارائه نمودند. نسبت ارتفاع موج به عمق آب در این آزمایش بین ۰/۰۵ تا ۰/۵ بوده و از روش رایلی برای حرکت موج‌ساز استفاده کرده‌اند. نتایج آنها از نظر دقت قابل مقایسه با روش گرینگ به روش بوسینسک است. همچنین در این روش، دامنه امواج دنباله‌ای کوچک‌تری در پشت موج تنها نسبت به گرینگ تولید می‌شود (Guizien and Barthelemy, 2002).

Malek-Mohammadi و Testik (۲۰۱۰) یک رویکرد جدید برای تولید موج تنها توسط موج‌ساز پیستونی با در نظر گرفتن طبیعت موج در طول فرآیند تولید بیان کرده‌اند. سپس این رویکرد توسط تعدادی آزمایش در کانال موج‌ساز مورد ارزیابی قرار گرفته است. در انجام آزمایشات، از رویکرد جدید به همراه تئوری‌های بوسینسک، رایلی و گرینگ برای تولید موج تنها استفاده شده است. مقایسه نتایج حاصل از انجام این آزمایش برای هر دو رویکرد با نتایج تحلیلی نشان می‌دهد که رویکرد جدید در تولید موج تنها دقیق‌تر از رویکرد گرینگ می‌باشد و در طول روند انتشار، ارتفاع موج از افت کمتری برخوردار است (Malek-Mohammadi and Testik, 2010).

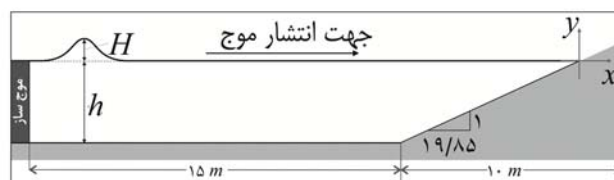
در تحقیقات Li و همکاران (۲۰۱۲) از روش هیدرودینامیک ذرات هموار که یک روش بدون شبکه می‌باشد، برای انتشار و اندرکنش موج تنها با موانع زیرسطحی استفاده شده است. از جمله معایب این روش، هزینه محاسباتی بسیار زیاد در حل مسائل است. مثلاً برای یک مسئله انتشار موج تنها در این مقاله، ۲۵۰۰۰۰ ذره در نظر گرفته شده است که هزینه محاسباتی آن ۶ روز کامل توسط یک سوپر کامپیوتر بوده است (Li et al., 2012).

Wu و همکاران (۲۰۱۵) با استفاده از روش نقاط محدود، به شبیه‌سازی تولید و انتشار موج تنها پرداخته‌اند. این روش بر اساس پتانسیل سرعت در فرم لاگرانژی معادله لاپلاس عمل می‌کند. مهمترین عیب این روش، استفاده از تعداد نقاط زیاد در کل دامنه حل و همچنین پیچیدگی برنامه نویسی الگوریتم آن است (Wu et al., 2015).

Han و Cho (۲۰۱۵) بالاروی موج تنها روی سطوح شیب‌دار و همچنین فشار موج تنها روی دیوار قائم را در آزمایشگاه مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، حداکثر ارتفاع بالاروی حاصل

تکاملی خود در طول انتشار، بدون تغییر در شکل یا اندازه باقی خواهد ماند (Hammack et al., 1978).

روش‌های مختلف تولید و انتشار موج تنها در آزمایشگاه شامل سقوط وزنه (Russell, 1845; Wiegel, 1955)، آزادسازی حجم مشخصی از آب در پشت یک مانع (Kishi et al., 1966) و حرکت افقی یک پدال قائم توسط موج‌ساز پیستونی (Hall et al., 1969; Camfield et al., 1953) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمامی این روش‌ها، موج تولیدی توسط موج‌ساز پیستونی به عنوان یک روش متداول و رایج مورد استفاده قرار می‌گیرد. علت این انتخاب مزایای زیاد این روش نسبت به سایر روش‌ها است. شکل‌گیری سریع موج تنها در فاصله نزدیکی از موج‌ساز و همچنین دقت بالای موج‌تهای تولیدی از نظر شباهت به موج با مشخصات واقعی (مانند ارتفاع، شکل پروفیل و مشخصات انتشار موج) از جمله مزایای این روش می‌باشد. تصویر شماتیک کانال آزمایش طراحی شده توسط (Synolakis, 1987) در شکل ۱ نمایش داده شده است. Madsen و همکاران (۲۰۰۸) مطالعه‌ای روی حرکت امواج بزرگ و امواج متناوب با اشاره به سونامی ۲۰۰۴ در هند انجام داده‌اند. همچنین ارتباط ژئوفیزیکی تئوری موج تنها با مطالعات آزمایشگاهی سونامی نیز بررسی شده است.



شکل ۱: طرح کانال آزمایش برای تولید و انتشار موج تنها بر اساس مشخصات (Synolakis, 1987)

از طرف دیگر، با توجه به ماهیت غیرخطی مسائل موجود در این زمینه و عدم وجود روش‌های تحلیلی، تمایل زیادی برای توسعه روش‌های عددی در محاسبه حرکات سطح آزاد سیال وجود داشته است. در تحقیقات Dutykh و همکاران (۲۰۱۱) از روش عددی حجم محدود برای انتشار و بالاروی امواج، به-خصوص موج تنها استفاده شده است. از آنجایی که این روش یکی از پرکاربردترین روش‌ها در مسائل مربوط به سطح آزاد می‌باشد، نتایج خوبی برای انتشار این موج حاصل شده است. مشکل مهم این روش در پیچیدگی برنامه نویسی و صرف زمان فراوان به

ارضای شرایط مرزی در مرزهای سیال (شامل سطح آزاد و دیواره‌های نفوذناپذیر جامد) به دست می‌آیند.

## ۲. معادلات حاکم و شرایط مرزی مسائل سطح آزاد بر مبنای فشار

معادلات لاگرانژی حاکم بر حرکت سیال غیرلزج تراکم‌ناپذیر دارای سطح آزاد، شامل معادله پیوستگی (بقای جرم) و معادله تعادل دینامیکی (بقای اندازه حرکت) به صورت زیر بیان می‌شود (Zandi et al., 2012a)

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

در روابط فوق،  $p$  فشار،  $\rho$  چگالی سیال،  $\mathbf{u}$  بردار سرعت سیال و  $\mathbf{g} = \langle 0 \ -g \rangle^T$  بردار حاوی شتاب ثقل است. شرایط مرزی برای روش عددی مورد نظر بر اساس پتانسیل فشار معرفی می‌شود. در این راستا، اگر فشار به صورت زیر فرض شود:

$$p = p_H - \rho g y \quad (3)$$

در رابطه فوق،  $y$ ، مؤلفه قائم مختصات دکارتی،  $p_H$  جواب همگن و  $\rho g y$  جواب خصوصی برای معادلات دیفرانسیل حاکم می‌باشد. با قرار دادن فشار کل از رابطه ۳ در معادلات ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\nabla^2 p_H = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p_H \quad (5)$$

در ادامه، شرط مرزی معادله بر روی مرزهای نفوذناپذیر در تماس با سیال به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a} = -\mathbf{n}^T \nabla p_H \Rightarrow \left. \frac{\partial p_H}{\partial n} \right|_{\Gamma_s} = -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a} \Big|_{\Gamma_s} = -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a}_s \quad (6)$$

از آزمایشات با روابط موجود مقایسه شده است. آنها این آزمایشات را روی سطوح شیب‌دار با زوایای ۱۵، ۲۰ و ۴۵ درجه انجام داده و مجموعه‌ای از معادلات تجربی را روی این اطلاعات آزمایشگاهی درون‌یابی نموده‌اند (Han and Cho, 2015).

جزئیات توسعه یک مدل عددی دو بعدی و در قائم غیرهیدروستاتیک برای شبیه‌سازی جریان‌های با سطح آزاد توسط چگینی و منتظری نمین (۱۳۸۹) ارائه شده است. معادلات حاکم بر این مدل، معادلات ناویر-استوکس انتگرال‌گیری شده در عرض هستند که با استفاده از روش حجم محدود و در مختصات کارتزین گسسته‌سازی شده و به کمک روش تصویر حل شده‌اند. مقایسه نتایج عددی با تحلیلی و آزمایشگاهی، نشان می‌دهند که مدل ارائه شده در شرایطی که فرض فشار هیدروستاتیک صادق نیست، می‌تواند جریان‌های با سطح آزاد را به خوبی شبیه‌سازی نماید (چگینی و منتظری نمین، ۱۳۸۹). همچنین شانه‌ساززاده و مرادویسی (۱۳۹۲)، شبیه‌سازی عددی انتقال موج ساحلی مبتنی بر معادلات یک بعدی غیرخطی آب‌های کم‌عمق (NSW) را در مقایسه با نتایج شبیه‌سازی مدل MIKE21 BW 1DH، که براساس معادلات یک‌بعدی بوسینسک توسعه یافته، و نیز داده‌های میدانی، مورد ارزیابی و درستی‌سنجی قرار دادند. مقایسه انجام شده با داده‌های میدانی نشان می‌دهد که در تخمین عمق متوسط آب، مدل بوسینسک مزیت ویژه‌ای نسبت به مدل مبتنی بر معادلات یک‌بعدی غیرخطی آب‌های کم‌عمق از خود نشان نمی‌دهد (شانه‌ساززاده و مرادویسی، ۱۳۹۲).

روش جدیدی که در این تحقیق برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیال تراکم‌ناپذیر در شبیه‌سازی انتشار موج تنها ارائه می‌شود، حل بدون شبکه با استفاده از توابع پایه نمایی در فرم لاگرانژی است. پیش‌تر این توابع در حل مسائل الاستیسیته و موج الاستیک (Boroomand et al., 2010)، تحلیل محیط‌های تراکم‌ناپذیر و تلاطم سیال در مخازن مستطیلی نیز استفاده شده است (Zandi et al., 2012a; Zandi et al., 2012b). در روش توسعه داده شده در این تحقیق، معادلات حاکم تنها به معادله لاپلاس فشار خلاصه شده و سایر مشخصه‌های سیال (شتاب، سرعت و جابجایی) از آن حاصل می‌شود؛ لذا شرایط مرزی مسأله بسیار ساده بیان می‌شود. بدین منظور، پاسخ کلی سیستم در هر مرحله زمانی، به صورت مجموعی از توابع نمایی با یک سری ضرایب ثابت در نظر گرفته می‌شود؛ به صورتی که توابع ذکر شده در معادلات دیفرانسیل بطور دقیق صدق کرده و ضرایب ثابت از

که در این رابطه،  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  است. برای محاسبه ضرایب  $C_i$  فرض می‌شود (Boroomand et al., 2010).

$$C_i = \mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B \quad (12)$$

درایه‌های بردار  $\bar{\mathbf{P}}_B$  در رابطه فوق، مقادیر شرایط مرزی در لحظه و هندسه مورد نظر است.

$$(13)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_B = \{(p_B)_1 \ (p_B)_2 \ \dots \ (p_B)_m \mid (\partial p_B)_{m+1} \ (\partial p_B)_{m+2} \ \dots \ (\partial p_B)_n\}^T$$

که در رابطه فوق،  $n$  تعداد کل نقاط روی مرزهای سیال و  $m$  تعداد نقاط استفاده شده روی سطح آزاد است. همچنین در این رابطه داریم:

$$(14)$$

$$(p_B)_k = [\rho g y]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F, \quad k = 1, \dots, m$$

$$(15)$$

$$(\partial p_B)_k = -\rho [n_x \dot{u}_x + n_y \dot{u}_y]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_S, \quad k = m+1, \dots, n$$

بردار  $\mathbf{V}_i$  بر اساس شرایط مرزی موجود در هر یک از نقاط مرزی و یا به عبارت دیگر بر اساس درایه‌های بردار  $\bar{\mathbf{P}}_B$  تعریف می‌شود. بنابراین در نقاط مربوط به  $\Gamma_S$ ، باید  $\partial/\partial n$  پایه  $i$ ام در آن نقطه محاسبه شود؛ در نقاط مربوط به  $\Gamma_F$  نیز مقدار پایه  $i$ ام در آن نقطه محاسبه و در درایه نظیر آن در بردار  $\mathbf{V}_i$  قرار داده می‌شود. بنابراین، با توجه به توضیحات ارائه شده می‌توان نوشت:

$$(16)$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{s_j} \{(p_i)_1 \ (p_i)_2 \ \dots \ (p_i)_m \mid (\partial p_i)_{m+1} \ (\partial p_i)_{m+2} \ \dots \ (\partial p_i)_n\}^T$$

که در این رابطه داریم:

$$(17)$$

$$(p_i)_k = [e^{\alpha_i x + \beta_i y}]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F, \quad k = 1, \dots, m$$

$$(18)$$

$$(\partial p_i)_k = [(\alpha_i n_x + \beta_i n_y) e^{\alpha_i x + \beta_i y}]_{x=x_k, y=y_k} \quad \forall (x_k, y_k) \in \Gamma_S, \quad k = m+1, \dots, n$$

که در رابطه فوق،  $\mathbf{n}$  بردار یکه عمود (نرمال خارجی) بر مرز سیال در تماس با دیواره‌های صلب،  $\Gamma_S$ ، می‌باشد و بردار  $\mathbf{a}$  شتاب سازه صلب در تماس با سیال است. لازم به ذکر است که معادلات مورد استفاده که مبتنی بر معادلات سیال ایده‌آل (غیر لزج) است، طبیعتاً توانایی مدل‌سازی تنش برشی و لایه مرزی در مرزها را نخواهد داشت. در مساله مورد بحث در این تحقیق تنها در مرز مجاور موج‌ساز پیستونی شتاب وجود خواهد داشت. بر این اساس اگر  $S(t)$  معرف جابجایی پدال موج‌ساز<sup>۱</sup> باشد، در مرز مجاور موج‌ساز  $\mathbf{a} = \langle \ddot{S}(t) \ 0 \rangle^T$  و در سایر دیواره‌ها  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  خواهد بود. همچنین، شرط مرزی بر روی سطح آزاد،  $\Gamma_F$ ، نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$p|_{\Gamma_F} = 0 \quad (7)$$

که با توجه به رابطه ۳ داریم:

$$p_H|_{\Gamma_F} = \rho g y|_{\Gamma_F} \quad (8)$$

### ۳. روش مبتنی بر توابع پایه نمایی برای حل معادله لاپلاس فشار

توزیع فشار در کل دامنه حل با استفاده از توابع پایه نمایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\hat{p}_H = \sum C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (9)$$

در این رابطه،  $x$  و  $y$  مختصات یک نقطه عمومی در دامنه  $\Omega$ ،  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  اعداد مختلط و  $C_i$  ضرایب ثابت مستقل از مختصات می‌باشند. حال با قرار دادن رابطه ۹ در معادله ۴ خواهیم داشت:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 0 \quad (10)$$

با توجه به رابطه ۱۰، می‌توان مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را به صورت زیر بدست آورد.

$$\alpha_i = \pm i \beta_i \quad \text{or} \quad \beta_i = \pm i \alpha_i \quad (11)$$

<sup>1</sup> Wave-maker Stroke

افقی آب در مجاورت پدال،  $\bar{u}$ ، برابر با سرعت پدال موج به- صورت زیر است:

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{u}(\xi, t) \quad (22)$$

در این رابطه  $\xi(t)$  موقعیت پدال موج در هر زمان  $t$  است. با تغییر متغیر  $X = (ct - \xi)$  در رابطه فوق رابطه فوق حاصل می‌شود:

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{\bar{u}(X(\xi))}{c - \bar{u}(X(\xi))} \quad (23)$$

که در رابطه ۲۳،  $\bar{u}$  بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{u}(\xi, t) = \frac{c\eta(X)}{h + \eta(X)} \quad (24)$$

در رابطه فوق،  $\eta$  تغییر مکان سطح آزاد سیال و  $h$  عمق آب است.

دو روش مرسوم برای تعیین مشخصات موج تنهای تولید شده مبتنی بر معادله حرکت پدال، روش‌های بوسینسک و رایلی هستند (Boussinesq, 1871; Rayleigh, 1876). هر دو این روش‌ها براساس فرمول ارائه شده توسط متدلوزی گرینگ (رابطه ۲۲) اعمال می‌گردند. تفاوت عمده این دو روش با یکدیگر در توصیف تغییر مکان سطح آزاد سیال ( $\eta$ ) و سرعت موج ( $C$ ) است.

#### ۴-۱ روش بوسینسک<sup>۲</sup>

جابجایی سطح آزاد سیال در این تئوری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\eta = H \operatorname{Sech}^2(KX) \quad (25)$$

در رابطه فوق،  $K$  ضریب کاهنده مرزی،  $H$  ارتفاع موج و  $X = (ct - \xi)$  است. ضریب کاهنده مرزی برای حل موج تنها برای تئوری بوسینسک به صورت زیر حاصل می‌شود.

همچنین  $S_j$  ضریب یکه کردن بردارهای مشارکت پایه‌ها است. سری  $\hat{P}_H$  با در نظر گرفتن رابطه ۱۲ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\hat{P}_H = \sum (\mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B) e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (19)$$

حال اگر درایه‌های بردار  $\bar{\mathbf{P}}_B$  را توسط سری فوق برآورد کنیم، خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{P}}_B = \sum (\mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B) \mathbf{V}_i \quad (20)$$

و لذا می‌توان ماتریس  $\mathbf{R}$  را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\bar{\mathbf{P}}_B = \sum (\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T) \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B \Rightarrow \mathbf{R} = \left( \sum (\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T) \right)^{-1} \quad (21)$$

بدین ترتیب با محاسبه ماتریس  $\mathbf{R}$ ، ضرایب  $C_i$  بدست آمده و حل معادله کامل خواهد بود. ضرایب  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  بر اساس روش ارائه شده توسط Zandi و همکاران (۲۰۱۲a)؛ Boroomand و همکاران (۲۰۱۰) انتخاب می‌شوند. باید توجه داشت که تعداد پایه‌های مورد استفاده تأثیر مستقیم بر نتایج خواهند داشت.

#### ۴. معادله تحریک‌کننده پدال موج‌ساز

قدم اول در بررسی انتشار موج تنها تعیین معادله و شبیه سازی عددی تولید موج تنها است. یکی از روش‌های متداول تولید و انتشار موج تنها در آزمایشگاه استفاده از پدال موج‌ساز با یک سیستم تحریک کننده می‌باشد. این سیستم تحریک کننده که از یک قسمت مکانیکی تشکیل شده دارای تجهیزاتی نظیر موتور هیدرولیکی است که توسط آن پدال موج‌ساز به حرکت در می‌آید. در این راستا، جهت به حرکت در آوردن این قسمت مکانیکی و ایجاد موج تنها با مشخصات مورد نظر ابتدا لازم است روابط ریاضی آن به دست آمده و پس از تحلیل توسط کامپیوتر به این قسمت اعمال گردد.

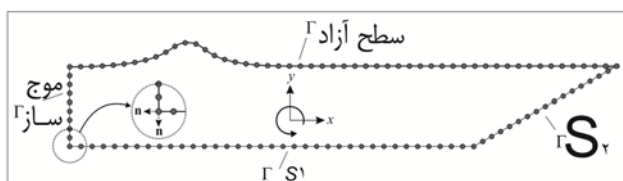
با فرض پایدار بودن شکل موج تنها در طول فرآیند تولید، گرینگ<sup>۱</sup> فرمولی برای تعیین حرکت پدال موج ارائه داده است (Goring, 1978). روند معمول تولید موج تنها شامل سرعت حرکت پدال در هر مکان و زمان به همراه متوسط سرعت ذرات

<sup>2</sup> Boussinesq

<sup>1</sup> Goring

## ۵. الگوریتم لاگرانژی حل و بهنگام‌سازی هندسه در روش عددی

ابتدا هندسه اولیه مساله مورد نظر تعریف شده و نقاط گره‌ای در کل مرزها به روشی مناسب توزیع می‌شود (شکل ۲).



شکل ۲: نقاط مرزی استفاده شده در روش عددی

سرعت سیال در ابتدای گام زمانی  $n$  ام  $(\Delta t^n = t^{n+1} - t^n)$ ، لحظه  $t^n$ ، بصورت  $\mathbf{u}^n$  نشان داده می‌شود. سپس شرایط مرزی در لحظه  $t^n$  و در هندسه موجود در این لحظه،  $\mathbf{x}^n$ ، با استفاده از روابط ۳ و ۵ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{p}_H^n}{\partial n} &= -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a}_s^n \quad \text{on } \Gamma_S \\ \hat{p}_H^n &= \rho g y^n \quad \text{on } \Gamma_F \end{aligned} \quad (29)$$

که در این روابط،  $\hat{p}_H^n$  بیانگر  $\hat{p}_H^n$  در لحظه  $t^n$  است. در محاسبه شرایط مرزی، لازم است گره‌های چهار گوشه کانال جزء دیواره‌ها محسوب شود. تابع  $\hat{p}_H^n$  در مختصات هر نقطه به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\hat{p}_H^n = \Re \left[ \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_j^n} e^{\alpha_j x + \beta_j y} \mathbf{v}_j^{nT} \right) \mathbf{R}^n \bar{\mathbf{P}}_H^n \right] \quad (30)$$

در این رابطه،  $\mathbf{v}_j^n$  بردار مشارکت پایه‌ها در نقاط مرزی متناظر با درایه‌های بردار  $\bar{\mathbf{P}}_H^n$  است. حال با در نظر گرفتن رابطه ۵، شتاب نقاط در لحظه  $t^n$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{a}^n = -\frac{1}{\rho} \Re \left[ \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_j^n} \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} e^{\alpha_j x + \beta_j y} \mathbf{v}_j^{nT} \right) \mathbf{R}^n \bar{\mathbf{P}}_H^n \right] \quad (31)$$

با محاسبه شتاب نقاط روی مرزها و قرار دادن آنها در بردار  $\mathbf{a}^n$ ، سرعت نقاط با استفاده از رابطه زیر بهنگام می‌شود.

$$K = \sqrt{\frac{3H}{4h^3}} \quad (26)$$

همچنین سرعت موج نیز در این تئوری به صورت زیر بیان می‌شود.

$$c = \sqrt{g(h+H)} \quad (27)$$

در این روش، گرینگ توانست امواج دنباله‌ای تولیدی در پشت موج تنها را توسط تئوری بوسینسک به حداقل برساند (Goring, 1978; Boussinesq, 1871).

### ۲-۴ روش رایلی<sup>۱</sup>

در این روش روابط مربوط به جابجایی سطح آزاد سیال و سرعت موج همانند روش بوسینسک است (Rayleigh, 1876). تنها تفاوت موجود بین این دو روش مربوط به ضریب کاهنده مرزی است که برای این روش به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$K = \sqrt{\frac{3H}{4h^2(h+H)}} \quad (28)$$

بررسی روش‌های مختلف شبیه‌سازی عددی حرکت پدال تولید موج تنها از حوصله این نوشتار خارج می‌باشند؛ این مهم توسط نویسندگان انجام گردیده و در مقاله مستقلی ارائه می‌گردد. با توجه به آنکه روش بوسینسک به عنوان متداول‌ترین روش برای تعیین مشخصات موج تنها مورد استفاده قرار می‌گیرد و دامنه گسترده‌ای از تحقیقات تا حال حاضر از این روش بهره برده‌اند (Goring, 1978; Synolakis, 1987; Madsen et al., 2008; Dutykh et al., 2011; Li et al., 2012)، بنابراین در این تحقیق نیز از روش بوسینسک برای تعیین مشخصات موج تنها استفاده شده است.

<sup>1</sup> Rayleigh

- (۶) درونیابی سرعت  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  روی هندسه  $\mathbf{x}^n$ ، و محاسبه سرعت در هندسه  $\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}$  که با  $\mathbf{u}^{n+1}$  بیان می‌شود. این سرعت به عنوان سرعت اولیه گام بعدی ذخیره می‌گردد؛
- (۷) بهنگام‌سازی نهایی هندسه (مختصات نقاط گره‌ای) با استفاده از رابطه ۳۵ و ذخیره آن به عنوان هندسه اولیه گام بعدی؛
- (۸) رفتن به گام ۲ و تکرار تا پایان حل.

## ۶. نتایج و بحث

### ۶-۱- شبیه‌سازی انتشار موج تنها توسط روش عددی ارائه شده

به‌منظور شبیه‌سازی انتشار موج تنها از اطلاعات به‌دست آمده از انجام آزمایش دو بعدی روی موج تنها در یک کانال موج<sup>۱</sup> توسط سینولاکیس<sup>۲</sup> استفاده می‌گردد (Synolakis, 1987). در این آزمایش، موج تنها توسط متدلوژی گرینگ و تئوری حرکت پدال بوسینسک تولید می‌گردد. این کانال آزمایشگاهی دارای طول محاسباتی ۲۵ متر بوده که شامل دو قسمت است. قسمت اول به طول ۱۵ متر که به‌صورت مستقیم است و قسمت دوم به طول ۱۰ متر که به‌صورت شیب‌دار با شیب ۱ به ۱۹/۸۵ است (شکل ۱).

در این آزمایش، عمق آب در کانال ۰/۲۸۵۵ متر و نسبت ارتفاع موج به عمق آب ۰/۰۴ است. نمونه‌ای از نقاط مرزی محاسباتی در روش عددی با توجه به ابعاد کانال برای این آزمایش در شکل ۳ نمایش داده شده است. تعداد این نقاط ۱۳۶ عدد و تعداد پایه‌های مورد استفاده نیز برابر ۴۰۰ عدد می‌باشد. گام زمانی انتخاب شده در روش عددی ۰/۰۵ ثانیه است. به‌منظور تعیین زمان انجام فرآیند شبیه‌سازی و مقایسه با روش‌های دیگر از این حیث، متذکر می‌گردد که جهت انجام این شبیه‌سازی از یک کامپیوتر رومیزی ۶۴ بیتی استفاده شده است<sup>۳</sup>. در این راستا، حداکثر مدت زمان حل کامل برای این مسئله برابر ۵۳۵ ثانیه (تقریباً ۹ دقیقه) بوده است که در مقایسه با روش‌های عددی

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{a}^n \Delta t \quad (32)$$

در این رابطه  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  در واقع  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^n, t^{n+1})$  می‌باشد. حال با استفاده از رابطه زیر نقاط گره‌ای مرزها جابجا می‌شوند.

$$\tilde{\mathbf{x}}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \Delta t \quad (33)$$

به این ترتیب تقریبی از هندسه نهایی حاصل خواهد شد. حال مقادیر گره‌ای  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ ، ساخته شده روی هندسه  $\mathbf{x}^n$ ، بر هر گره محاسبه شده و با استفاده از آن مقادیر سرعت در هندسه  $\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}$  بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}) \quad (34)$$

این سرعت به عنوان سرعت اولیه گام بعدی ذخیره می‌گردد. سپس هندسه نهایی توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + (\mathbf{u}^n(1-\gamma) + \mathbf{u}^{n+1}(\gamma)) \Delta t \quad (35)$$

در رابطه فوق پارامتر  $\gamma$  در محدوده  $0 \leq \gamma \leq 1$  قابل استفاده خواهد بود. در حالت  $\gamma=1$  یک الگوریتم زمانی کاملاً ضمنی حاصل می‌گردد. بنابراین مراحل حل به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

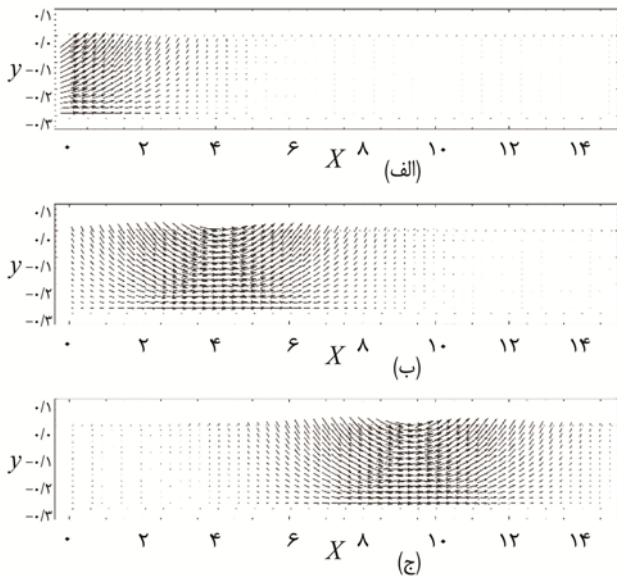
### ۱-۵ گام به گام روند حل

- (۱) مقداردهی اولیه مساله با استفاده از شرایط اولیه در گام  $n=0$  و در لحظه  $t=0$  شامل هندسه اولیه و سرعت اولیه در صورت وجود؛
- (۲) محاسبه شرایط مرزی مساله در هندسه فعلی  $\mathbf{x}^n$  و در لحظه  $t^n$  توسط رابطه ۲۹؛
- (۳) حل معادله لاپلاس فشار با شرایط مرزی مربوط به هندسه  $\mathbf{x}^n$  و لحظه  $t^n$  و محاسبه شتاب با استفاده از رابطه ۳۱؛
- (۴) بهنگام‌سازی سرعت نقاط با استفاده از رابطه ۳۲؛
- (۵) بهنگام‌سازی هندسه (مختصات نقاط گره‌ای) با استفاده از سرعت محاسبه شده در مرحله قبل، از طریق رابطه ۳۳؛

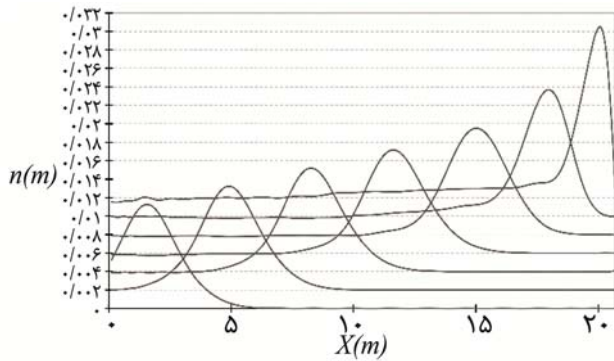
<sup>1</sup> Flume

<sup>2</sup> Synolakis

<sup>3</sup> CPU: Core i7 2600k 3.8 GHz \*RAM: 8 GB DDR3, VGA: nVIDIA 560 GTX



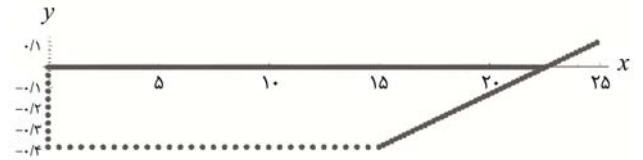
شکل ۵: میدان سرعت سیال در طول فرآیند انتشار موج تنها توسط روش عددی برای زمان‌های ۳، ۶ و ۹ ثانیه



شکل ۶: مراحل تکامل موج تنها در کانال موج برای نسبت ارتفاع موج به عمق آب  $(H/h)$  برابر ۰/۰۴

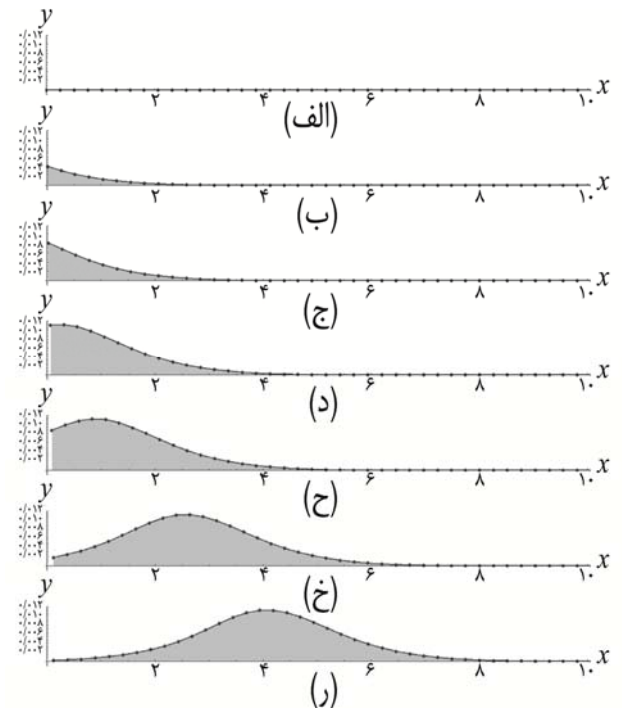
تغییرات خطای نسبی در حین انتشار نتایج روش عددی ( $H_N$ : ارتفاع موج حاصل از روش عددی) نسبت به مقدار تحلیلی ( $H$ : ارتفاع موج مساله) برای سه مورد نسبت ارتفاع موج به عمق آب مختلف در شکل ۷ ارائه گردیده است. لازم به ذکر است که حداکثر مدت زمان حل کامل برای این سه مورد حدود ۵ دقیقه بوده است. چنانکه ملاحظه می‌گردد این خطا در بدترین شرایط کمتر از ۰/۰۲٪ است که نشان از دقت قابل قبول روش عددی دارد. جهت بررسی دقت نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی عددی، تغییرات سطح آزاد سیال بین روش عددی و اطلاعات آزمایشگاهی حاصل از Synolakis (1987) برای چهار گیج سطح‌سنج در کانال موج مقایسه شده است.

مبتنی بر حل کامل معادلات سیال به طور قابل ملاحظه‌ای کوتاه است.



شکل ۳: نمایشی از نقاط مرزی تولیدی برای کانال آزمایش توسط روش عددی (واحدها برحسب متر است).

شکل ۴ نمونه‌ای از مراحل تولید و انتشار موج تنها توسط روش عددی را نشان می‌دهد. در این نمودار تولید و انتشار موج در چند مقطع زمانی در بازه ۰ تا ۵ ثانیه نشان داده شده است. شکل ۵ میدان سرعت سیال در طول فرآیند انتشار موج تنها برای سه زمان مختلف را نشان می‌دهد و شکل ۶ نمایش‌دهنده تکامل ارتفاع موج تنها است. در شکل ۶، تعدادی گیج محاسباتی در نقاط مختلف از کانال موج تعریف شده است که توسط آنها تغییرات پروفیل سطح آزاد موج عبوری نمایش داده می‌شود. چنانکه ملاحظه می‌گردد روی سطح شیب‌دار (انتهای کانال)، روند تغییرات پروفیل موج کاملاً محسوس است.



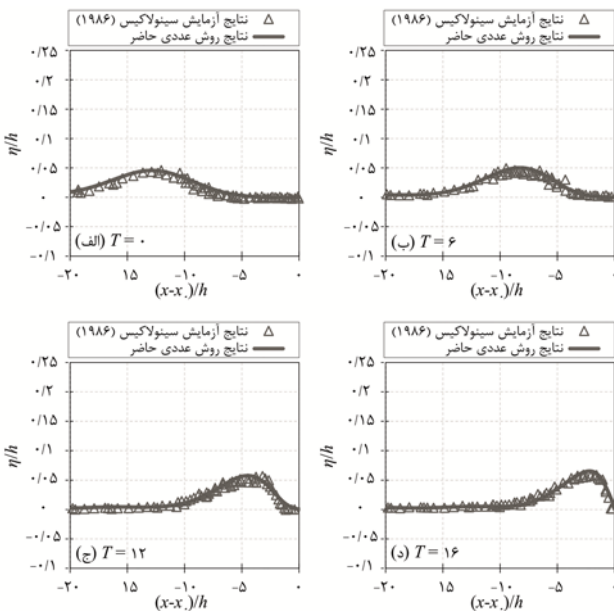
شکل ۴: مراحل مختلف حرکت ذرات سطح آزاد سیال در طول فرآیند تولید و انتشار موج تنها توسط روش عددی برای بازه زمانی ۰ تا ۵ ثانیه



رابطه زیر بی‌بعد شده است:

$$T = \frac{t}{\sqrt{h/g}} \quad (36)$$

در این رابطه،  $t$  زمان محاسباتی توسط روش عددی است. بنابراین، در این شکل وقتی که موج از گنج اول عبور می‌کند، زمان برابر صفر در نظر گرفته شده است. همچنین مبداء مختصات در این اشکال خط ساحل (محل تقاطع سطح آب ساکن و شیب) در نظر گرفته شده است. با مقایسه نتایج این اشکال، دقت قابل ملاحظه بین نتایج آزمایشگاهی و روش عددی دیده می‌شود که در خصوص نسبت  $0.02$  نتایج انطباق بیشتری دارند.

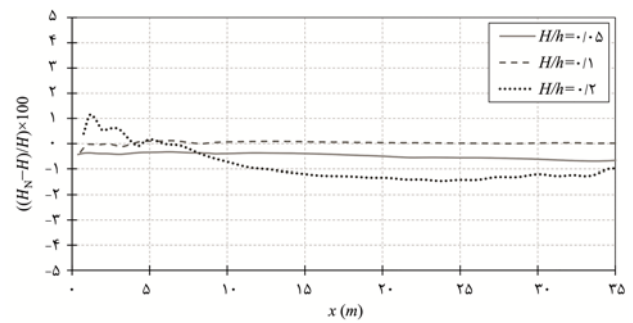


شکل ۹: مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی تغییرات سطح آزاد سیال در کانال موج برای نسبت ارتفاع موج به عمق آب  $H/h = 0.04$  و  $h = 0.2855$

چنانکه ملاحظه می‌گردد روش عددی به خوبی فرآیند انتشار موج تنها را در مقاطع مختلف زمانی و مکانی را شبیه‌سازی نموده است که نشان‌دهنده قابلیت اعتماد بالای روش توسعه داده شده در این تحقیق است.

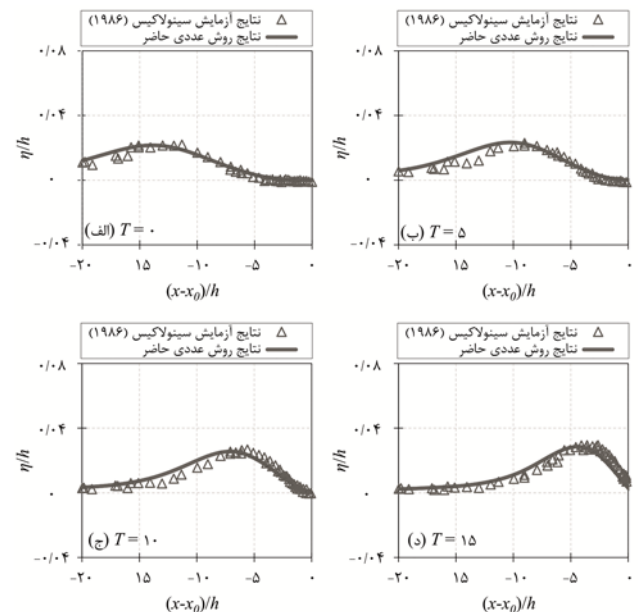
### ۷. نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی انتشار یک موج تنها که نماینده حرکت سونامی به سمت سواحل است از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. در این



شکل ۷: انتشار موج تنها در کانال‌های طویل با استفاده از روش عددی مورد نظر

در مرجع مذکور برای استخراج داده‌های آزمایشگاهی از یک کانال با بستر افقی استفاده شده است. عمق این کانال  $1/5$  متر و طول آن  $35$  متر در نظر گرفته شده است. برای شبیه‌سازی عددی شرایط مشابه، تعداد نقاط مرزی  $204$  عدد و تعداد پایه‌های نمایی  $160$  عدد انتخاب شده است و گام زمانی مورد استفاده برای شبیه‌سازی نیز ثانیه می‌باشد. نمونه نتایج مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی و نتایج آزمایشگاهی برای دو نسبت ارتفاع موج به عمق  $0.04$  و  $0.02$  به ترتیب در شکل ۸ و شکل ۹ ارائه گردیده‌اند.



شکل ۸: مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی تغییرات سطح آزاد سیال در کانال موج برای نسبت ارتفاع موج به عمق آب  $H/h = 0.02$  و  $h = 0.3097$

در این اشکال به منظور یکسان‌سازی مشخصات مساله با آنچه که توسط Synolakis (1987) بیان شده است، پارامتر زمان توسط

- Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81: 971-1018.
- Boussinesq, M.J., 1871. Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *C. R. Academic Science Paris*, 72: 755-759.
- Camfield, F.E.; Street, R.L., 1969. Shoaling of solitary waves on small slopes. *Journal of Waterway and Harbor Div*, 1: 1-22.
- Dutykh, D.; Katsaounis, T.; Mitsotakis, D., 2011. Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup. *Journal of Computational Physics*, 230: 3035-3061.
- Goring, D.G., 1978. Tsunamis - the propagation of long waves onto a shelf. Report No. KH-R-38, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, CA. 763-784.
- Guizien, K.; Barthelemy, E., 2002. Short waves modulations by large free surface solitary waves. Experiments and models. *Physics of Fluids*, 13: 3624-3635.
- Hall, J.V.; Watts, J.W., 1953. Laboratory investigation of the vertical rise of solitary waves on impermeable slopes. Tech Memo 33. Beach Erosion Board. Office of the Chief of Engineers. U.S. Army Corps of Engineers. Army Coastal Engineering Research Center. Washington, D.C, Technical Memorandum, 33: 1-14.
- Hammack, J.L.; Segur, H., 1987, The Korteweg–de Vries equation and water waves, part 2. Comparison with experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, 65: 289-314.
- Han, S.; H.T.; Cho, Y.S., 2015. Laboratory experiments on run-up and force of solitary waves. *Journal of Hydro-environment*, 9(4): 582-591.
- Kishi, T.; Saeki, H., 1966. The shoaling, breaking, and مقاله روش بدون شبکه توابع پایه نمایی برای شبیه‌سازی انتشار موج تنها توسعه داده شده است. استفاده از مفهوم لاگرانژی حرکت در کنار بدون شبکه بودن روش حل معادلات در این روش، این امکان را فراهم می‌نماید تا جابجایی‌های سطح آزاد به خوبی توسط نقاط مرزی مدل‌سازی شود. در این روش با دنبال کردن نقاط مرزی سیال می‌توان هندسه حل را بهنگام کرده و به سادگی سرعت نقاط را محاسبه نمود. لذا هیچ‌گونه انتقال اطلاعات بین شبکه حل و یا نامنظمی شبکه و هزینه تولید شبکه جدید نیاز نخواهد بود. نتایج بدست آمده توسط شبیه‌سازی عددی انتشار موج تنها روی شیب مبتنی بر روش بدون شبکه تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد و به خوبی تکامل ارتفاع موج تنها بر روی قسمت‌های مختلف از این کانال را مدل‌سازی می‌کند. همچنین، این روش عددی انتشار موج تنها در کانال‌های طولی را با دقت بالایی شبیه‌سازی می‌کند که در روند انتشار، کاهش ارتفاع موج بسیار ناچیز می‌باشد.
- با توجه به نتایج قابل قبول به‌دست آمده از روش بدون شبکه مورد استفاده در این تحقیق انتظار می‌رود روش ارائه شده بتواند پدیده‌هایی نظیر بالاروی سونامی روی ساحل و همچنین برخورد امواج بلند با موانع سطحی و زیر سطحی را به خوبی شبیه‌سازی نماید. اگرچه روش ارائه شده در این مقاله براساس معادلات سیال ایده آل ( غیر لزج) توسعه داده شده است و امکان در نظر گرفتن زبری بستر در شرایط مرزی در حال حاضر وجود ندارد، ولی انتظار می‌رود با در نظر گرفتن تنش‌های برشی و زبری بستر به صورت مصنوعی بتوان کاهش انرژی موج ناشی از زبری بستر و پدیده شکست موج را نیز شبیه‌سازی نمود که موضوع تحقیق آتی است.
- منابع**
- چگینی، ف.؛ منتظری نمین، م.، ۱۳۸۹. توسعه مدل غیرهیدرواستاتیک دوبعدی در قائم برای شبیه‌سازی جریان‌های با سطح آزاد. نشریه اقیانوس‌شناسی، سال اول، شماره ۳، صفحات ۳۵-۴۴.
- شانه‌ساززاده، ا.؛ مرادپسی، ب.، ۱۳۹۲. ارزیابی نتایج شبیه‌سازی عددی معادلات یک‌بعدی غیرخطی آب‌های کم‌عمق در مناطق کم‌عمق ساحلی. نشریه اقیانوس‌شناسی، سال چهارم، شماره ۱۵، صفحات ۷۱-۸۲.
- Boroomand, B.; Soghrati, S.; Movahedian, B., 2010.

- Journal of Fluid Mechanics, 185: 523-545.
- Wiegel, R.L., 1955. Laboratory studies of gravity waves generated by the movement of a submarine body. EOS Trans. American Geophysical Union, 36(5): 759-774.
- Wu, N.; Tsay, T.; Chen, Y., 2015. Generation of stable solitary waves by a piston-type wave maker. Wave Motion, 51: 240-255.
- Zandi, S.M.; Boroomand, B.; Soghrati, S., 2012a. Exponential basis functions in solution of incompressible fluid problems with moving free surfaces. Journal of Computation Physics, 231: 505-527.
- Zandi, S.M.; Boroomand, B.; Soghrati, S., 2012b. Exponential basis functions in solution of problems with fully incompressible materials: A mesh-free method. Journal of Computational Physics, 231: 7255-7273.
- runup of the solitary wave on impermeable rough slopes, Proc. 10<sup>th</sup> Coastal Engineering Conference Tokyo. ASCE, 322-348.
- Li, J.; Liu, H.; Gong, K.; Tan, S.K.; Shao, S., 2012. SPH modeling of solitary wave fissions over uneven bottoms. Coastal Engineering, 60: 261-275.
- Madsen, P.A.; Fuhrman, D.R.; Schaeffer, H.A., 2008. On the solitary wave paradigm for tsunamis. Journal of Geophysics Research. Oceans. 113. C12012.
- Malek-mohammadi, S.; Testik, F.Y., 2010. New methodology for laboratory generation of solitary wave. Journal of Waterway. Port, Coastal and Ocean Engineering. ASCE, 136: 286-294.
- Rayleigh, L., 1876. On waves. Phil Magazine, 1: 257-279.
- Russell, J.S., 1845. Report on Waves. Proc. 14<sup>th</sup> Meeting of British Association for the Advancement of Science. John Murray. London, 311-390.
- Synolakis, C.E., 1987. The runup of solitary waves.